

DM 1 : Bilan de compétences

A rendre le lundi 9 septembre 2024 (à 8h)

- ☞ Une attention toute particulière sera accordée à la présentation et à la rédaction.
- ☞ On encadrera à la règle les résultats finaux de chaque question.
- ☞ On laissera une marge de 3 cm minimum sur la gauche de chaque page.

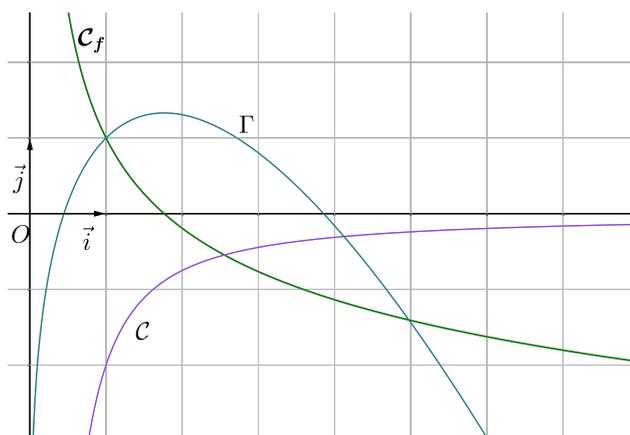
Exercice 1. Une étude de fonction.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$$

On appelle C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Sur le graphique ci-dessous, on donne C_f , et les courbes Γ et C , l'une étant la courbe représentative de f' et l'autre celle d'une primitive F de f .
 - (a) Par lecture graphique, indiquer laquelle des deux courbes C ou Γ représente f' . Justifier sa réponse.
 - (b) Par lecture graphique donner $F(1)$.
2. Dans cette question on demande d'utiliser l'expression algébrique de f mais on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le graphique ci-dessus.



- (a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
- (b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
- (c) Déterminer l'expression algébrique de f' puis montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-x-1}{x^2}$$

- (d) Dresser le tableau de variations de f .

3. Soit H la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$H(x) = x - (x-1)\ln(x)$$

- (a) Montrer que H est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
- (b) En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.
- (c) Calculer

$$\int_1^x f(t)dt$$

Exercice 2. Inéquations.

Résoudre sur \mathbb{R} les inéquations suivantes. On conclura les calculs par la donnée de l'ensemble des solutions en prenant soin d'encadrer cette conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S} = \dots}$$

1. $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$

2. $\frac{2x-3}{x+5} > 0$

3. $\frac{-x^2+x+6}{-9} \leq 0$

4. $\frac{x-1}{x-2} \leq \frac{3x+1}{2x-4}$