DM 1 : pour le 6 novembre 2023

Exercice 1. *obligatoire* On considère l'équation (E)

$$z^4+3iz^3-(3i+2)z^2+(10-3i)z+3i-9=0$$

1. Montrer que cette équation possède une racine réelle a et la déterminer.
   En déduire qu'il existe un polynôme P de degré 3 que l'on déterminera tel que :
   $$z^4+3iz^3-(3i+2)z^2+(10-3i)z+3i-9=(z-a)P(z)$$
2. Montrer que l'équation $P(z)=0$ possède une racine imaginaire pure et la déterminer.
3. En déduire une factorisation de $P(z)$.
4. Résoudre l'équation (E).

Exercice 2. *Niveau 1* .
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1. $z^2+3z+8=0$
2. $z^2-(1+i)z+2+2i=0$
3. $z^2+(6+i)z+7-3i=0$

Exercice 3. *Niveau 2* .

Soient $n\geq 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1+x)^n$.
1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression algébrique de $f'(x)$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Développer $f(x)$ en utilisant la formule du binôme de Newton. En dérivant chaque terme de la somme, en déduire une autre expression de $f'(x)$.
3. En prenant $x=1$ dans les deux expressions montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k=n2^{n-1}$$
4. Montrer que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ de deux manières différentes.
5. Déduire de la question précédente que
   $$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)=n(n-1)2^{n-2}$$
6. En déduire que
   $$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=n(n+1)2^{n-2}$$
   Indication : On pourra remarquer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)$