Correction DM 2 :

Exercice 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$ »

Initialisation :

$|\sin(0x) = 0|$ et $0 \times |\sin(x)| = 0$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a alors

$$\begin{array}{rcl} |\sin((n+1)x)| & = & |\sin(nx+x)| \\ & = & |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)| \\ & \leq & |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)| \\ & \leq & |\sin(nx)| \times |\cos(x)| + |\sin(x)| \times |\cos(nx)| \\ & \leq & |\sin(nx)| \times 1 + |\sin(x)| \times 1 \\ & \leq & n|\sin(x)| + |\sin(x)| \text{ D'après notre Hypothèse de Récurrence} \\ & \leq & (n+1)|\sin(x)| \end{array}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Certains élèves écrivent dans l'étape d'hérédité « on suppose $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ». Cela n'a pas de sens puisque c'est ce que l'on veut démontrer à la fin de la conclusion ! On doit donc fixer un n quelconque en écrivant « Soit $n \in \mathbb{N}$ », puis supposer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie (pour ce n là) et en déduire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On aura donc prouvé dans l'hérédité l'implication :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

Exercice 2.

Le raisonnement par équivalence était préconisé dans cet exercice. Trop d'élèves ont voulu raisonner par équivalence mais ne l'ont pas clairement formulé. Certains ont même articulé leur raisonnement avec des « d'où », faisant donc des déduction et non un raisonnement par équivalence. Ils ne montraient donc pas ce qu'il fallait.

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. On a :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} & \iff & a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ & \iff & a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \\ & \iff & (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0 \\ & \iff & (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{array}$$

   Puisque les carrés de nombres réels sont positifs, cette dernière inégalité est vraie. On a donc bien $\boxed{\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$.

   La rédaction du raisonnement par équivalence doit être soignée sinon le correcteur peux ne pas comprendre votre raisonnement ! Trop de copies oublient les symboles équivalent et n'expliquent par le raisonnement.

2. Dans l'inégalité précédente, on a égalité si et seulement si $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, et donc si et seulement si $\sqrt{a} = \sqrt{b}$. Comme a et b sont positifs, il y a égalité si et seulement si $\boxed{a = b}$.

   Quand on doit trouver les cas d'égalité, on doit trouver <u>toutes</u> les possibilités qui donnent une égalité (donc raisonner par équivalence).

3. Soit u un réel strictement positif. En posant $a = u$ et $b = \dfrac{1}{u}$, on a bien $a > 0$ et $b > 0$. D'après (1), on a donc $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = 1$, d'où $\boxed{u + \dfrac{1}{u}} \geq 2$.

4. Puisque a et b sont strictement positifs, tous les termes de l'inégalité sont bien définis et positifs. Comme $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > 0$, l'inégalité est équivalente à $\sqrt{ab}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 2$, qui s'écrit encore : $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 2$. En posant

$u = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, cette dernière inégalité se réécrit $u + \dfrac{1}{u} \geq 2$, et elle est donc vraie d'après (3). On en déduit que $\boxed{\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}$

5. Il y a égalité si et seulement si il y a égalité à toutes les étapes : en particulier, on doit avoir $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, et donc $a = b$. On constate que si $a = b$, les deux côtés de l'inégalité sont égaux à a.
   $\boxed{\text{Il y a donc égalité si et seulement si } a = b}$

6. Si a et b sont de signes opposés, les inégalités ne sont pas définies.

   De plus, si $a < 0$ et $b < 0$, alors $\frac{a+b}{2} < 0$ et $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < 0$. Puisque les racines carrées sont positives, (1) est fausse et (4) est vraie.

   Finalement, si un des deux termes est nul et l'autre strictement négatif, (1) est fausse et (4) n'est pas définie.

   En conclusion : $\boxed{\text{L'inégalité de (1) est vraie pour les couples } (a,b) \text{ tels que } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0}$ et

   $\boxed{\text{l'inégalité de (4) est vraie pour les couples } (a,b) \text{ tels que } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \text{ et pour les couples tels que } a < 0 \text{ et } b < 0.}$

Exercice 3.

1. (a) On a $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

   (b) On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\\ &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1\end{aligned}$$

   donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Or, $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$. D'où $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$.

   Attention : il faut absolument justifier que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ pour affirmer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ et non $-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

   (c) On sait que $\cos^2(\frac{\pi}{8}) + \sin^2(\frac{\pi}{8}) = 1$. D'après (b), on a alors $\sin^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

   Comme $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, on sait que $\sin(\frac{\pi}{8}) \geq 0$. Donc $\boxed{\sin(\dfrac{\pi}{8}) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$.

   (d) Comme $2 \geq 1 \geq 0$, on a $\sqrt{2} \geq 1$, et donc $\sqrt{2} - 1 \geq 0$. De plus, $(\sqrt{2}-1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$, donc on a bien $\boxed{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1}$.

   On rappelle que la racine carré de $3 - 2\sqrt{2}$ est le nombre réel positif dont le carré vaut $3 - 2\sqrt{2}$. Or $\sqrt{2} - 1 \geq 0$ et $(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ donc on a bien $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.
   Trop de copies oublient de justifier cela !!

(e) D'après (b) et (c), on a

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\sin(\frac{\pi}{8})}{\cos(\frac{\pi}{8})} \\
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} \\
&= \sqrt{\frac{6-2\sqrt{2}}{2}} \\
&= \sqrt{3-2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

D'après (d), on a donc bien $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1}$.

2. (a) On a $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1}$

(b) On a

$$\begin{aligned}
1 &= \tan(\frac{\pi}{4}) \\
&= \tan(2 \times \frac{\pi}{8}) \\
&= \frac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1-\tan^2(\frac{\pi}{8})} \\
&= \frac{2t}{1-t^2}
\end{aligned}$$

Donc $1 - t^2 = 2t$. Finalement, $\boxed{t^2 + 2t - 1 = 0}$.

(c) Le discriminant de l'équation trouvée en (b) est $2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$: l'équation a donc deux solutions réelles, à savoir : $\frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$ et $\frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$. Cette dernière solution est strictement négative, et ne peut donc pas être égale à $\tan(\frac{\pi}{8})$, puisque $\tan(\frac{\pi}{8}) > 0$.

Donc $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1}$.