

DM 2 :

A rendre le 30 septembre 2024 (à 8h)

- ☞ Une attention toute particulière sera accordée à la présentation et à la rédaction.
- ☞ On encadrera à la règle les résultats finaux de chaque question.
- ☞ On laissera une marge de 3 cm minimum sur la gauche de chaque page.

Exercice 1.Soit $x \in \mathbb{R}$.Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

Exercice 2.Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Démontrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
2. Déterminer les cas d'égalité de l'inégalité de la question 1.
3. Montrer que pour tout réel strictement positif u on a $u + \frac{1}{u} \geq 2$
4. Démontrer que $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$. On justifiera soigneusement toutes les étapes.
5. Déterminer les cas d'égalité de l'inégalité de la question 4.
6. (Bonus) Pour quels couples de réels quelconques (a, b) est-ce que les inégalités des questions 1. et 4. restent vraies ?

Exercice 3.Dans cet exercice, on se propose de calculer $\tan(\frac{\pi}{8})$ de deux façons différentes.

1. Première méthode :
 - (a) Rappeler les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{4})$ et $\sin(\frac{\pi}{4})$.
 - (b) À l'aide des formules de linéarisation, déterminer la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$. (*On veillera à bien justifier le signe*)
 - (c) Déterminer la valeur de $\sin(\frac{\pi}{8})$.
 - (d) Montrer que $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$
 - (e) Montrer que $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$
2. Deuxième méthode : On pose $t = \tan(\frac{\pi}{8})$.
 - (a) Rappeler la valeur de $\tan(\frac{\pi}{4})$
 - (b) En utilisant la formule d'addition de \tan , montrer que t vérifie une équation du second ordre.
 - (c) Montrer que $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$