Corrigé DM 3 : Sommes et nombres complexes

A rendre le lundi 4 novembre 2024 (à 8h)

Exercice 1.

1. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $S_n = n2^{n+1} + 1$.

   Initialisation : On d'une part $S_0 = (0+1)2^0 = 1$ et d'autre part $0 \times 2^{-1} + 1 = 1$. D'où la propriété est vrai pour $n = 0$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $S_n = n2^{n+1} + 1$. On a :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}(k+1)2^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k + (n+2)2^{n+1} \\
&= S_n + (n+2)2^{n+1} \\
&= n2^{n+1} + 1 + (n+2)2^{n+1} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (2n+2)2^{n+1} + 1 \\
S_{n+1} &= (n+1)2^{n+2} + 1
\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = n2^{n+1} + 1.}$

2. (a) Si $x = 1$, alors $(x-1)S_n(x) = 0$. Sinon, on a :

$$\begin{aligned}
(x-1)S_n(x) &= (x-1)\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k \\
&= x\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}kx^k - \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k \\
&= (n+1)x^{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n}x^k\right) - 1 \\
&= (n+1)x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}x^k \\
&= \boxed{(n+1)x^{n+1} - \frac{x^{n+1}-1}{x-1}} && \text{car } x \neq 1
\end{aligned}$$

   (b) On a $S_n = S_n(2) = (n+1)2^{n+1} - \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$ et donc $\boxed{S_n = n2^{n+1} + 1}$

3. (a) On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}1\right)2^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}2^k = \boxed{\sum_{0\leq i\leq j\leq n}2^j}$$

(b) On calcule alors

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^j &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} 2^j \frac{1-2^{n-j+1}}{1-2} \\
&= \sum_{j=0}^{n} 2^{n+1} - 2^j \\
&= (n+1)2^{n+1} - 2^0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\
&= (n+1)2^{n+1} + 1 - 2^{n+1} \\
&= n2^{n+1} + 1
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{S_n = n2^{n+1} + 1}$

Exercice 2.

1. On a $IA = |a-1|$, $AB = |a^2 - a| = |a||a-1| = |a-1|$ car $|a| = 1$, $BC = |a^3 - a^2| = |a^2||a-1| = |a-1|$ car $|a^2| = 1$, $CD = |a^4 - a^3| = |a^3(a-1)| = |a-1|$ car $|a^3| = 1$ et $DI = |1 - a^4| = |a^5 - a^4| = |a-1|$ car $|a^4| = 1$. Finalement toutes les longueurs considérées sont toutes égales à $|a-1|$ donc sont égales.
2. (a) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^5 - 1 \quad = \quad (z-1)(z^4 + z^3 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

On a donc, en prenant $z = a$,

$$(a-1)(a^4 + a^3 + a^3 + a^2 + a + 1) \quad = \quad a^5 - 1$$

or $a^5 = 1$ donc $a^5 - 1 = 0$ ce qui donne $(a-1)(a^4 + a^3 + a^3 + a^2 + a + 1) = 0$.
Or $a \neq 1$ donc on a nécessairement $a^4 + a^3 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$.

(b) On a

$$\begin{aligned} a^3 &= e^{3\times\frac{2i\pi}{5}} \\ &= e^{\frac{6i\pi}{5}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{a}^2 &= (e^{\frac{-2i\pi}{5}})^2 \\ &= e^{\frac{-4i\pi}{5}} \end{aligned}$$

Or $e^{i(2\pi - \frac{4i\pi}{5})} = a^{\frac{6i\pi}{5}}$ on a donc $a^3 = \overline{a}^2$.
De la même manière on a

$$a^4 \quad = \quad e^{\frac{8i\pi}{5}}$$

et

$$\overline{a}^2 \quad = \quad e^{-\frac{2i\pi}{5}}$$

Or $e^{i(2\pi - \frac{2\pi}{5})} = e^{\frac{8i\pi}{5}}$ d'où

$$\overline{a}^2 = a^4$$

On a

$$\begin{aligned} (a+\overline{a})^2 + (a+\overline{a}) - 1 &= a^2 + 2a\overline{a} + \overline{a}^2 + a + \overline{a} - 1 \\ &= a^2 + a^3 + 2a\overline{a} + a + a^4 - 1 \end{aligned}$$

or $a\overline{a} = 1$ d'où

$$\begin{aligned} (a+\overline{a})^2 + (a+\overline{a}) - 1 &= a + a^2 + a^3 + a^4 + 2 - 1 \\ &= a + a^2 + a^3 + a^4 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après la question (a).

(c) L'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ est une équation de degré 2 de disciminant $4 + 16 = 20$ et admet donc deux racines réelles distinctes : $\frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ et $\frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$

(d) On a

$$(a+\overline{a})^2 + (a+\overline{a}) - 1 = \left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$$

Puisque $(a+\overline{a})^2 + (a+\overline{a}) - 1 = 0$ on a donc

$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

Or $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$ car $0 < \frac{2\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ et on en déduit finalement que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est la solution positive de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$. Conclusion : $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Exercice 3.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, puisqu'un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginiaires sont nulles

$$x^4 + 4ix^2 + 12(1+i)x - 45 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^4 + 12x - 45 = 0 \\ 4x^2 + 12x = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^4 + 12x - 45 = 0 \\ 4x(x+3) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^4 + 12x - 45 = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = -3 \end{cases}$$

Puisque seule -3 est solution de la première équation on en déduit que -3 est la solution réelle de l'équation de départ.

2. On sait que l'on peut factoriser le polynome $z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45$ par $(z+3)$. En écrivant $P(z)$ sous la forme $z^3 + az^2 + bz + c$ et en identifiant les coefficients on trouve $a = -3$, $b = 4i + 9$ et $c = -15$. On a donc $P(z) = z^3 - 3z^2 + (4i+9)z - 15$.
3. Cherchons une solution à l'équation $P(z) = 0$ sous la forme $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. On a

$$P(iy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iy^3 + 3y^2 - 4y + 9iy - 15 = 0$$

or un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie rélle et sa partie imaginaire sont nulles donc

$$P(iy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3y^2 - 4y - 15 = 0 \\ -y^3 + 9y = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $y = 3$ et donc une solution imaginaire pure $z = 3i$.

4. On peut donc factoriser $P(z)$ par $(x - 3i)$ On écrit $P(z) = (x - 3i)(z^2 + a'z + b')$ et en identifiant les coefficients on trouve $a' = -3 + 3i$ et $b' = -5i$. Finalement

$$P(z) = (z - 3i)(z^2 + (-3+3i)z - 5i)$$

5. On a donc finalement

$$z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0 \Leftrightarrow z = -3 \text{ ou } z = 3i \text{ ou } z^2 + (-3+3i)z - 5i = 0$$

Cette dernière équation (de degré 2) admet pour solution $2 - i$ et $1 - 2i$. On a donc

$$\mathcal{S} = \{2 - i; 1 - 2i; -3; 3i\}$$