DM 4

A rendre le lundi 9 décembre 2024 (à 8h)

Exercice 1.
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan. On appelle inversion de centre O l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \frac{z}{|z|^2} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$.
2. Montrer que f est involutive, c'est-à-dire que $f \circ f = id_{\mathbb{C}^*}$.
3. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
4. Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 2. *Approximation décimale d'un nombre réel.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit les suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

et

$$\beta_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

1. Pour $x = \pi$, déterminer les 5 premiers termes de α et β
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leq x < \beta_n$
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p\lfloor x \rfloor \leq \lfloor px \rfloor$ et $p\lfloor x \rfloor + p \geq \lfloor px \rfloor + 1$
4. Montrer que $(\alpha_n)_n$ est croissante
5. Montrer que $(\beta_n)_n$ est décroissante
6. Montrer que $(\alpha_n - \beta_n)_n$ est une suite qui tend vers 0
7. En déduire que les suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ convergent vers une limite commune.
8. Quelle-est cette limite ?

Exercice 3.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.
3. Déterminer la dérivée de f.
4. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$? Interpréter ceci graphiquement.
5. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
6. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
7. Dresser le tableau de variations complet de f.
8. Tracer la courbe représentative de f ainsi que la tangente T.
9. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{x})$.