

DM 4 : corrigé

Exercice 1. 1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{z}} &= \frac{z}{z\bar{z}} \\ &= \frac{z}{|z|^2} \\ &= \frac{z}{|z|} \cdot \frac{1}{|z|} \end{aligned}$$

On a donc bien : pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} f(f(z)) &= \frac{1}{\overline{f(z)}} \\ &= \frac{1}{\overline{\frac{1}{\bar{z}}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{z}} \\ &= z \end{aligned}$$

L'application f est donc bien involutive.

3. Soient z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. On a donc $f(f(z_1)) = f(f(z_2))$, c'est-à-dire puisque f est involutive, $z_1 = z_2$. L'application f est donc injective. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$.

On a $Z = f(f(Z))$ donc $Z \in f(\mathbb{C}^*)$. L'application f est donc surjective.

L'application f est donc bijective.

4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}} = z \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble laissé invariant par l'application f est le cercle unité.

Exercice 2.

Approximations décimales d'un nombre réel

1. Pour $x = \pi$, on trouve

$$\alpha_0 = E(x) = 3$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= E(x) + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{E(10x)}{10} \\ &= 3,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{E(10x) + 1}{10} \\ &= 3,2 \end{aligned}$$

De même on calcule tous les termes demandés que l'on rassemble dans le tableau suivant :

i	α_i	β_i
0	3	4
1	3,1	3,2
2	3,14	3,15
3	3,141	3,142
4	3.1415	3.1416
5	3.14159	3.14160
6	3.141592	3.141593
7	3.1415926	3.1415927
8	3.14159265	3.14159266
9	3.141592653	3.141592654
10	3.1415926535	3.1415926536

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{E(10^n x)}{10^n} \\ &\leq \frac{10^n x}{10^n} \text{ puisque } E(10^n x) \leq 10^n x \text{ et } 10^n > 0 \\ &= x\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{E(10^n x) + 1}{10^n} \\ &> \frac{10^n x}{10^n} \text{ puisque } E(10^n x) + 1 > 10^n x \text{ et } 10^n > 0 \\ &= x\end{aligned}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $E(x) \leq x < E(x) + 1$ donc en multipliant chaque terme de l'inégalité par nombre strictement positif, on obtient

$$pE(x) \leq px < pE(x) + p$$

4. On vient de montrer que $pE(x)$ est un entier inférieur ou égal à px . Or $E(px)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à px . On a donc $pE(x) \leq E(px)$. De même $pE(x) + p$ est un entier strictement supérieur à px . Or $E(px) + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à px . On a donc $pE(x) + p \geq E(px) + 1$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \frac{E(10^{n+1}x)}{10^{n+1}} \\ &= \frac{E(10 \times 10^n x)}{10^{n+1}} \\ &\geq \frac{10 \times E(10^n x)}{10^{n+1}} \text{ en appliquant la question 4 avec } p = 10 \\ &= \frac{E(10^n x)}{10^n} \\ &= \alpha_n\end{aligned}$$

La suite (α_n) est donc croissante.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \frac{E(10^{n+1}x) + 1}{10^{n+1}} \\ &= \frac{E(10 \times 10^n x) + 1}{10^{n+1}} \\ &< \frac{10 \times E(10^n x) + 10}{10^{n+1}} \text{ en appliquant la question 4 avec } p = 10 \\ &= \frac{E(10^n x) + 1}{10^n} \\ &= \beta_n\end{aligned}$$

La suite (β_n) est donc décroissante.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|\alpha_n - \beta_n| = \frac{1}{10^n}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n - \beta_n = 0$$

8. Les suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ sont donc adjacentes et donc convergent vers une limite l .

En passant à la limite dans l'inégalité démontrée à la question 2, on obtient $l \leq x \leq l$ et donc $l = x$.

Les suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ convergent donc toutes deux vers le réel x .

Exercice 3.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow 1+x \neq 0 \text{ et } -1 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1+x \neq 0 \text{ et } -1 \leq \frac{1-x}{1+x} \text{ et } \frac{1-x}{1+x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } \frac{-2x}{1+x} \leq 0 \text{ et } \frac{2}{1+x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ (faire deux tableaux de signes)} \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$

2. La fonction f est dérivable en x si et seulement si f est définie et $-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$, ce qui donne, en reprenant le raisonnement précédent avec des inégalités strictes, $x > 0$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Après calculs, on trouve que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

4. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$. La courbe représentative de f admet donc en 0 une tangente verticale.

5. L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

c'est-à-dire

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

6. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

7. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ puisque $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$ et on a le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
f	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$



8. Graphique :

9. Soit g la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$, $g(x) = f(x) + 2 \arctan(\sqrt{x})$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{x}(1+x)} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}_+$ égale à $g(0)$. Puisque $g(0) = \frac{\pi}{2}$, on a pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) + 2 \arctan(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}$$

.