DM 5 corrigé

A rendre le 6 janvier 2025 (à 8h)

Exercice 1. *Moyenne de Césaro.*

1. (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = a$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$.

   (b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1+\cdots+n}{n} = \dfrac{n(n+1)}{2n} = \dfrac{n+1}{2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   (c) Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) \\ &= \frac{1}{n}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right) \\ &= \frac{1}{n}\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{\cos((n+1)\theta/2)\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right) \end{aligned}$$

   On a

$$|v_n| \leq \frac{1}{n|\sin(\theta/2)|}$$

   et

$$\frac{1}{n|\sin(\theta/2)|} \to 0$$

   donc par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2. Puisque $u_n \to 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$ $u_n \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. On fixe un tel n_0. Soit $n \geq n_0$. On a alors, d'après l'inégalité triangulaire et le fait que $n_0 \geq 1$:

$$\left|\frac{u_{n_0}+\cdots+u_n}{n}\right| \leq \frac{|u_{n_0}|+\cdots+|u_n|}{n} \leq \frac{(n+1-n_0)\frac{\varepsilon}{2}}{n} \leq \frac{n\frac{\varepsilon}{2}}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. L'entier n_0 étant fixé, $|u_1+\cdots+u_{n_0-1}|$ est une constante. D'où

$$\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right| \to 0$$

   Il existe donc un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

4. Soit $n \geq \max(n_0, n_1)$. D'après (1), comme $n \geq n_0$, on a

$$\left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   . D'après (2), comme $n \geq n_1$, on a

$$\left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   Finalement, grâce à l'inégalité triangulaire, en additionnant les deux inégalités on obtient :

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right| \\ &\leq \left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right| + \left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

La suite v tend donc vers 0.

5. Supposons, que u converge vers $l \in \mathbb{R}$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = u_n - l$. La suite w converge alors vers 0. D'après (4), la suite de terme général $\dfrac{w_1 + \cdots + w_n}{n}$ converge aussi vers 0. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{w_1 + \cdots + w_n}{n} = \frac{u_1 - l + \cdots + u_n - l}{n} = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - l = v_n - l$$
Donc, la suite de terme général $v_n - \ell$ tend vers 0, d'où v converge vers ℓ.
6. La réciproque est fausse : considérons la suite de terme général $u_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$. La suite u diverge, car les suites extraites $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes égales à 1 et -1 respectivement, et convergent donc vers des limites différentes. Or, d'après (1.c), la suite correspondante $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. On trouve $A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$.
2. On déduit de la question 1) que
$$A(A - 3I_2) = -2I_2$$
et donc
$$A(\frac{3}{2}I_2 - \frac{1}{2}A) = I_2$$
ce qui prouve que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{3}{2}I_2 - \frac{1}{2}A$
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On a
$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$$
avec $\deg(R) < 2$,
c'est à dire
$$X^n = (X-1)(X-2)Q(X) + aX + b$$
L'évaluation en 1 donne
$$1 = a + b$$
L'évaluation en 2 donne
$$2^n = 2a + b$$
et on obtient donc le système à deux équations et deux inconnues :
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases}$$
que l'on résout et on trouve
$$\begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$
Le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est donc $(2^n - 1)X + 2 - 2^n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
$$\begin{aligned} A^n &= (A^2 - 3A + 2I_2)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2 \\ &= (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2 \end{aligned}$$
puisque $A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$ d'après la question 1).

Exercice 3. 1. On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(a) On trouve $J^2 = 3J$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $J^n = 3^{n-1}J$. Remarquons aussi que pour $n = 1$, la formule reste valable.

(b) On a $A = \frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J$ et $\frac{1}{2}I$ est un multiple de l'identité donc commute avec toutes les matrices donc en particulier avec $\frac{1}{6}J$. La formule du binôme de Newton s'applique donc et on a pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}I\right)^{n-k} \left(\frac{1}{6}J\right)^k \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \left(\frac{1}{6}\right)^k J^k \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k J^k \\
&= \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k J^k \\
&= \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k 3^{k-1} J \\
&= \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right) J \\
&= \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{3} \left(2^n - 1\right) J
\end{aligned}$$

On a bien, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$M^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J$$