

DM 5 (facultatif)

A rendre le 6 janvier 2025 (à 8h)

Exercice 1. *Moyenne de Césaro.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par la relation

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

On veut montrer que si la suite u converge vers 0 alors la suite v converge aussi vers 0.

1. Calculer le terme général v_n de la suite v et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ dans les cas suivants.

- (a) La suite u est la suite de terme général $u_n = a$ où $a \in \mathbb{C}$.
- (b) La suite u est la suite de terme général $u_n = n$.
- (c) La suite u est la suite de terme général $u_n = \cos(n\theta)$ où $\theta \in 0\pi$.
(On pourra utiliser des nombres complexes)

2. On suppose que u est une suite qui converge vers 0.

- (a) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$\frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- (b) Montrer ensuite qu'il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_0-1}}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- (c) Démontrer enfin le résultat annoncé.

3. En déduire que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de même limite que u .
4. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
3. Facultatif : Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
4. Facultatif : En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

1. Exprimer J^2 , puis pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J .
2. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$M^n = \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) J$$