

DM 7 : Intégration

A rendre le lundi 24 mars 2025 (à 8h)

Exercice 1.

Soit $x \in]-1, 1[$ et f définie par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Calculer $f(x)$ en effectuant le changement de variable : $t = \sin u$ avec $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

1. Calculer J_1 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1},$$

et en déduire la limite de la suite (J_n) .

3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

4. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
5. Donner un équivalent de (I_n) .