DM 7 Correction

Exercice 1.
Soit $x \in]-1,1[$ et f définie par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

En effectuant le changement de variable : $t = \sin u$ avec $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $dt = \cos(u)du$ et $u = \arcsin(t)$ donc lorsque $t = 0$ on a $u = 0$ et lorsque $t = x$ on a $u = \arcsin(x)$.
D'où

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\sin^2(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} \cos(u) du \\
&= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\sin^2(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} \cos(u) du
\end{aligned}$$

Or puisque $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(u) \geq 0$ et donc $\sqrt{\cos^2(u)} = \cos(u)$.
D'où

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{\arcsin(x)} \sin^2(u) du \\
&= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1-\cos(2u)}{2} du \\
&= \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right] \\
&= \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{\sin(2\arcsin(x))}{4} \\
&= \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2.

1.

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\
&= \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0,1]$ on a $1 + t^2 \geq 1$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$. Or $t^n \geq 0$ donc $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$. Par croissance de l'intégrale on a donc $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$$

On pose $\begin{cases} u(t) = \ln(1+t^2) \\ v'(t) = t^n \end{cases}$ et on a $\begin{cases} u'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \\ v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$ convient.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc on peut faire une intégration par parties (IPP) et on obtient :

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[\ln(1+t^2)\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2} dt \\
&= \frac{\ln(2)}{n+1} - 0 - \frac{2}{n+1} J_{n+2}
\end{aligned}$$

4. Par somme de limite on trouve $\lim I_n = 0$
5. On a
$$\frac{I_n}{\frac{\ln(2)}{n+1}} = 1 - \frac{2J_{n+2}}{\ln(2)} \to 1$$
puisque
$$J_{n+2} \to 0$$
D'où
$$I_n \sim \frac{\ln(2)}{n+1} \sim \frac{\ln(2)}{n}$$