DM 8 : Pour le lundi 5 mai 2025 à 8h**Exercice 1.**

On se propose de déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan(x)} - \sqrt{1 + \sin(x)}}{x \ln(1 + x) - x^2}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1 + \tan(x)}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1 + \sin(x)}$.
3. En déduire un équivalent en 0 du numérateur de la fonction étudiée.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto x \ln(1 + x) - x^2$.
5. Calculer la limite de l'exercice.

Exercice 2.

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Le prouver.

1. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto XP' - X^2P''$
2. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto P(2)$
3. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto P(0) + 1$
4. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto XP^2$

Exercice 3.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note ϕ l'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe la matrice $\phi(M) = AM - MA$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\ker(\phi)$ puis $\dim(\text{Im}(\phi))$ grâce au théorème du rang.
3. Déterminer la matrice B de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
4. En déduire $\text{Im}(\phi)$ et retrouver $\ker(\phi)$.
5. (a) Montrer que $\ker(\phi) \cap \text{Im}(\phi) = \{0\}$.
 (b) Vérifier que la matrice I appartient à $\ker(\phi)$.
 (c) Etablir alors qu'il n'existe aucune matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\phi(M) = I$.
6. On considère les matrices $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 - (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (A, K_1, K_2, K_3)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Ecrire la matrice D de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4.

Trace d'une matrice.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels, on définit la trace de la matrice A notée $\text{tr}(A)$ par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,i}$$

1. Montrer que l'application de $M_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à A associe $\text{tr}(A)$ est linéaire.
2. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3, démontrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. Démontrer les deux propriétés précédentes dans le cas où les matrices sont carrées d'ordre n .