DM 8 : éléments de correction

Exercice 1.
On se propose de déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x\ln(1+x)-x^2}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+\tan(x)}$.

$$\sqrt{1+\tan(x)} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{11}{48}x^3+o(x^3)$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$.

$$\sqrt{1+\sin(x)} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+o(x^3)$$

3. En déduire un équivalent en 0 du numérateur de la fonction étudiée.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\tan(x)}-\sqrt{1+\sin(x)} &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{11}{48}x^3-(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3)+o(x^3)\\ &= \frac{12}{48}x^3+o(x^3)\\ &= \frac{1}{4}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

On a donc

$$\sqrt{1+\tan(x)}-\sqrt{1+\sin(x)} \sim \frac{1}{4}x^3$$

4. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto x\ln(1+x)-x^2$.

$$x\ln(1+x)-x^2 = -\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

5. Calculer la limite de l'exercice.
On a, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+\tan(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x\ln(1+x)-x^2} &= \frac{\frac{1}{4}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}\\ &\sim \frac{\frac{1}{4}x^3}{-\frac{1}{2}x^3}\\ &\sim \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x\ln(1+x)-x^2} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 2.
Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Le prouver.

1. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$
   $P \mapsto XP' - X^2P''$

   L'application f est linéaire. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda P_1 + P_2) & = & X(\lambda P_1 + P_2)' - X^2(\lambda P_1 + P_2)'' \\ & = & X(\lambda P_1' + P_2') - X^2(\lambda P_1'' + P_2'') \text{ Par linéarité de la dérivation} \\ & = & \lambda(XP_1' - X^2P_1'') + (XP_2' - X^2P_2'') \\ & = & \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{array}$$

2. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$
   $P \mapsto P(2)$

   L'application f est linéaire (à montrer de même)

3. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$
   $P \mapsto P(0) + 1$

   L'application f n'est pas linéaire : $f(0) = 1 \neq 0$

4. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$
   $P \mapsto XP^2$

   L'application f n'est pas linéaire : $f(1+1) = 4X \neq 2X = f(1) + f(1)$

Exercice 3.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note ϕ l'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe la matrice $\phi(M) = AM - MA$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Montrer que ϕ est linéaire (ne pas oublier!!!!!) et justifier que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \phi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Déterminer $\ker(\phi)$ puis $\dim(\mathrm{Im}(\phi))$ grâce au théorème du rang.

   Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} M \in \ker(\phi) &\Leftrightarrow AM - MA = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z - y = 0 \\ t - x = 0 \\ x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow M = y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   d'où

$$\ker(\phi) = \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Le théorème du rang nous donne alors $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = 4 - 2 = 2$
3. Déterminer la matrice B de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. En déduire $\mathrm{Im}(\phi)$ et retrouver $\ker(\phi)$.
   On trouve $\mathrm{Im}(\phi)$ en regardant l'espace engendré par les **colonnes de la matrice** B :

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5. (a) Montrer que $\ker(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$.
   A faire

   (b) Vérifier que la matrice I appartient à $\ker(\phi)$.
   I commute avec toutes les matrices donc avec A donc $\phi(M) = 0$

   (c) Etablir alors qu'il n'existe aucune matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\phi(M) = I$.
   S'il existe une matrice M telle que $\phi(M) = I$ alors $I \in \mathrm{Im}(\phi)$. Or on vient de voir que $I \in \ker(\phi)$ donc $I \in \ker(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$ et donc $I = 0$. Ceci est absurde et on en déduit que notre hypothèse de départ était fausse.
6. On considère les matrices $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (A, K_1, K_2, K_3)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
A faire avec les λ

(b) Ecrire la matrice D de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$.
Plutôt que d'utiliser la formule du changement de base (méthode qui fonctionne mais qui est longue), il était plus rapide ici de montrer que $f(A) = 0$, $f(K_1) = 0$, $f(K_2) = -2K_2$ et $f(K_3) = 2K_3$ et de trouver directement : D=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4.
Trace d'une matrice.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels , on définit la trace de la matrice A notée $\text{tr}(A)$ par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i}$$

Il fallait bien connaitre la définition du produit matriciel !.

1. Montrer que l'application de $M_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à A associe $\text{tr}(A)$ est linéaire.
   Soit A , B deux matrices réelles carrées d'ordre 3 , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(\lambda A + B) &= \sum_{i=1}^{3} (\lambda A + B)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \lambda a_{i,i} + b_{i,i} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{3} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{3} b_{i,i} \text{ par linéarité de la somme} \\ &= \lambda\, \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \end{aligned}$$

2. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 , démontrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{3} (AB)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{i,j} b_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{j,i} a_{i,j} \text{ par commutativité du produit sur } \mathbb{R} \\ &= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} b_{j,i} a_{i,j} \text{ car les sommes sont finies} \\ &= \sum_{j=1}^{3} (BA)_{j,j} \\ &= \lambda\, \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

3. Démontrer les deux propriétés précédentes dans le cas où les matrices sont carrées d'ordre n.
   Soit A , B deux matrices réelles carrées d'ordre n , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\lambda A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + B)_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} + b_{i,i} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \text{ par linéarité de la somme} \\
&= \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)
\end{aligned}$$

   et Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 , démontrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \text{ par commutativité du produit sur } \mathbb{R} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \text{ car les sommes sont finies} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (BA)_{j,j} \\
&= \lambda \operatorname{tr}(BA)
\end{aligned}$$