DM 3 : pour le lundi 11 mars 2024

Exercice 1 .
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-3X+2.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 .
Soit $x \in]-1,1[$ et f définie par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Calculer $f(x)$ en effectuant le changement de variable : $t = \sin u$, et $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 3 .
Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur C :

1. $X^3 - 1$
2. $2X^4 + 1$
3. $X^3 - X^2 + 4X - 4$

Exercice 4. *Généralisation de l'IPP* .

1. Soient n un entier naturel non nul et f et g deux fonctions de classe C^n sur $[a, b]$.
   Montrer par récurrence que :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)dt = \left[\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \ f^{(n-p-1)}(t)\, g^{(p)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b \ f(t)\, g^{(n)}(t)dt$$

   On rappelle que par convention : $f^{(0)} = f$.
   et que pour k entier non nul $f^{(k)}$ représente la dérivée k ième de f.
   Indication :
   On utilisera $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$

2. Applications Dans chaque cas :
   On précisera comment l'on choisit f , g et n et on appliquera la formule précédemment démontrée.
   (a) Calculer : $\displaystyle\int_0^x e^t\,(t^3 - 2t^2 + 5t - 1)dt$
   (b) Calculer : $\displaystyle\int_0^x (t^4 - 1)\sin(t)\, dt$

Exercice 5. *Polynôme d'interpolation de Lagrange* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ un $(n+1)-$uplet de nombres complexes deux à deux distincs.
On définit pour tout $i \in \{0, ...n\}$,

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

1. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{0, ...n\}^2$, on a $L_i(a_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$$

Indication : on pourra poser $Q = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$ *et montrer que le polynôme* $P - Q$ *possède* $n+1$ *racines donc est le polynôme nul*