DM2

Exercice 1 Adapté d'un sujet de modélisation-CCINP filière TSI.

On s'intéresse au mouvement d'un solide de masse $m > 0$ relié à un ressort de raideur $k > 0$. On modélise les frottements visqueux par un coefficient d'amortissement $\mu > 0$ et l'excitation par une fonction f définie et continue sur $[0; +\infty[$.
L'équation différentielle régissant le mouvement du solide est :

$$m\ddot{u}(t) + \mu\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \tag{1}$$

On suppose que $\boxed{\frac{\mu}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

Partie 1. *Cas où f s'annule (excitation dite « finie »)*

On suppose dans cette partie qu'il existe $\tau > 0$, telle que pour tout $t \geq \tau$, $f(t) = 0$.

1. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Justifier que l'équation différentielle (1) admet une unique solution réelle u sur $[0; +\infty[$ vérifiant $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = u_0 \in \mathbb{R}$.
   Indication : utiliser un théorème du cours
2. Montrer que pour tout $t \geq \tau$, u est de la forme suivante :
   $$u(t) = e^{\alpha t}\left(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)\right)$$
   où α, β, λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.
   On exprimera α et β en fonction de μ, k, et m mais on ne cherchera pas à expliciter λ_1 et λ_2.
3. Montrer que u et $\dot{u}$ admettent 0 pour limite en $+\infty$ puis donner une interprétation physique de ce résultat.

Partie 2. *Cas d'une excitation sinusoïdale*

On suppose que le solide est soumis à une excitation sinusoïdale de la forme :

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

où $f_0 > 0$ est l'amplitude de l'effort d'excitation et $\omega > 0$ la pulsation des vibrations forcées.

1. Donner l'ensemble des solutions réelles de l'équations homogène.
2. Trouver une solution particulière à l'équation complexifiée
   $$m\underline{\ddot{u}} + \mu\underline{\dot{u}} + k\underline{u} = f_0 e^{i\omega t}$$
3. En déduire une solution particulière réelle de l'équation (1).
4. Mettre cette solution sous la forme $A\cos(\omega t - \varphi)$ et exprimer A, $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$ en fonction de k, μ, m, f_0 et ω.

Partie 3. *Cas d'une excitation constante*

On suppose ici que $m = k = \mu = 1$ et que pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 5$.

1. Donner l'ensemble des solutions réelles de l'équation (1).
2. Trouver la solution u de l'équation (1) vérifiant $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = -1$.