DM facultatif : Extrait de Centrale TSI

Si E est un ensemble et k un entier naturel non nul, une **partition** de E en k parties est un ensemble $\{A_1, \dots A_k\}$ de parties de E non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à A :

1. $\forall i \in \{1, \dots k\}, A_i \neq \emptyset$
2. $\forall (i,j) \in \{1, \dots k\}^2, \;\; i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

Par exemple, $\{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}$ est une partition de $E = \{1,2,3,4,5\}$ en trois parties.
On notera en particulier que l'ordre dans lequel interviennent les parties $A_1, \dots A_k$ n'a pas d'incidence sur la définition de la partition.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots n\}$, on note $S_{n,k}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties. On pose également $S_{0,0} = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n,0} = 0$. Les nombres $S_{n,k}$ sont appelés nombres de Stirling de deuxième espèce.

1. (a) Déterminer la valeur de $S_{3,2}$ (on pourra déterminer toutes les partitions de $E = \{1,2,3\}$ en deux parties).
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que valent $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$?
2. Soit n un entier, k un entier compris entre 1 et $n-1$ et $E = \{x_1, \dots x_n\}$ un ensemble à n éléments. On souhaite établir une relation entre $S_{n,k}$, $S_{n-1,k-1}$ et $S_{n-1,k}$.
   (a) Dans cette question, on étudie l'exemple $E = \{1,2,3,4\}$ ($n = 4$) et $k = 2$.
      i. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$.
      ii. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une contient 4 tout en étant différente du singleton $\{4\}$.
      iii. Expliciter toutes les partitions de E en deux parties.
      iv. Vérifier, pour l'exemple traité, la relation $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$. Expliquer.
   (b) On revient au cas général présenté en début de question I.A.2.
      i. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une est $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      ii. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une contient x_n tout en étant différente du singleton $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      iii. En déduire que $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.
3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, $S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$. On pourra par exemple procéder par récurrence.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $S_{n,2} + 1 = 2(S_{n-1,2} + 1)$ et en déduire la valeur de $S_{n,2}$ pour tout entier $n \geq 2$.
   Indication : remarquer que la suite $(S_{n,2} + 1)_{n \geq 2}$ est une suite géométrique.
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ et deux ensembles $E = \{x_1, \dots x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots y_k\}$. On note $\sigma_{n,k}$ le nombre d'applications surjectives de E dans F.
   (a) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n < k$?
   (b) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n = k$?
   (c) Expliciter les applications surjectives de E dans F lorsque $n = 3$ et $k = 2$.
   (d) Préciser la valeur de $\sigma_{3,2}$.
   (e) Quelle relation existe-t-il entre $\sigma_{3,2}$ et $S_{3,2}$?
   (f) Dans cette question, on souhaite obtenir une relation entre $\sigma_{n,k}$ et $S_{n,k}$. Si f est une application de E dans F et j un entier compris entre 1 et k, on note $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$ l'ensemble des antécédents par f de y_j.
      i. Étant donnée une application f surjective de E dans F, montrer que $\mathcal{A} = \{A_1, \dots A_k\}$ est une partition de E en k parties. On note $\Pi(f)$ cette partition.
      ii. Etant donnée $\mathcal{A}' = \{A'_1, \dots A'_k\}$ une partition de E en k parties, combien combien y a-t-il d'applications f surjectives de E dans F telles que $\Pi(f) = \mathcal{A}'$.
      iii. En déduire la relation $\sigma_{n,k} = k!S_{n,k}$