DS 1 : le vendredi 15 septembre 2023

Calculatrice interdite.
Le soin et la rédaction sont notés sur 4 points.

Exercice 1. *6 points.*

1. Exprimer en fonction de $\tan(x)$ les expressions suivantes. On pourra faire des schémas pour expliquer les formules utilisées.
   (a) $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
   (b) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
   (c) $\tan(\pi-x)$
   (d) $\tan(\pi+x)$
2. Déterminer $\cos(x)$ sachant que $\sin(x)=\frac{2}{5}$ et $\cos(x)<0$.
3. Déterminer $\sin(x)$ sachant que $\cos(x)=-\frac{1}{6}$ et $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

Exercice 2. *6 points.*
Calculer, pour chaque nombre réel x donné, $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ (si ce dernier nombre existe)

1. $x=\frac{7\pi}{6}$ 2. $x=\frac{19\pi}{2}$ 3. $x=\frac{5\pi}{4}$
4. $x=\frac{-\pi}{12}$ 5. $x=\frac{-11\pi}{4}$ 6. $x=\frac{3\pi}{12}$

Exercice 3. *6 points.*
Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin(3x)=3\sin(x)-4\sin^3(x)$. Trouver une relation analogue reliant $\cos(3x)$ et $\cos(x)$.

Exercice 4. *6 points.*
Résolution d'une équation en utilisant la trigonométrie.

1. (a) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$. On démontrera la formule.
   (b) Montrer que $\cos(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos(\frac{3\pi}{8})=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
   (c) En déduire les valeurs de $\sin(\frac{3\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.
2. Montrer que $\cos(3\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)$
3. On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$8x^3-6x-\sqrt{2-\sqrt{2}}=0$$

   On admet que cette équation admet au plus trois solutions réelles
   (a) Rechercher les solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $[-1;1]$ en posant $x=\cos(\theta)$. On les exprimera à l'aide de cosinus.
   (b) Conclure.

Exercice 5. *2 points.*
Ecrire l'expression suivante sans cosinus ni sinus.

$$A=\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\cos^2\left(\frac{9\pi}{12}\right)$$