

DS 2 : novembre 2023

Calculatrice interdite.

Le soin et la rédaction sont notés sur 4 points.

Exercice 1. 6 points.

Résoudre sur \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $z^2 = 3 - 4i$
2. $z^2 - (3 + 2i)z + 3 + 9i = 0$
3. $z^2 - (1 + i)z - 14 + 23i = 0$
4. $z^3 = 1$
5. $z^4 = i$
6. $z^3 - (6 + 2i)z^2 + (11 + 16i)z - 6 - 24i = 0$ (indication : il y a une solution réelle)

Exercice 2. 10 points.

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 2 \cos(x)$
2. $y'' + y' + y = 5 \sin(3x)$
3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
4. $y'' - y = 2e^x$
5. $y'' + 3y' + y = e^{4x}$

Exercice 3. 6 points.

On considère l'équation (E)

$$z^4 - 4z^3 + (4 + 5i)z^2 - (1 + 5i)z - (10 + 10i) = 0$$

1. Montrer que cette équation possède une racine réelle x et la déterminer.
En déduire qu'il existe un polynôme P de degré 3 que l'on déterminera tel que :

$$z^4 - 4z^3 + (4 + 5i)z^2 - (1 + 5i)z - (10 + 10i) = (z - x)P(z)$$

2. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure et la déterminer.
3. En déduire une factorisation de $P(z)$.
4. Résoudre l'équation (E).