DS 2 niveau 2 : novembre 2023

Calculatrice interdite.
Le soin et la rédaction sont notés sur 4 points.

Exercice 1. *10 points.*
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 2\cos(x)$
2. $y'' + y' + y = 5\sin(3x)$
3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
4. $y'' - y = 2e^{x}$
5. $y'' + 3y' + y = e^{4x}$

Exercice 2. *10 points.*
On s'intéresse à la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ z & \longmapsto & z + \frac{1}{z} \end{array}$$

1. (a) Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, établir le lien entre $f\left(\frac{1}{z}\right)$ et $f(z)$.
   (b) L'application f est-elle injective ?
2. (a) Soit $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Justifier que l'équation $z^2 - \omega z + 1 = 0$ admet au moins une solution complexe non nulle. *On ne demande pas d'expliciter les solutions.*
   (b) L'application f est-elle surjective ?
3. On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$.
   (a) Montrer que si $z \in \mathbb{U}$ alors $|f(z)| \leq 2$.
   (b) Rappeler la forme exponentielle des éléments de $\mathbb{U}$.
   (c) Montrer que si $z \in \mathbb{U}$ est d'argument θ alors $f(z) = 2\cos(\theta)$. Retrouver l'inégalité précédente $|f(z)| \leq 2$.
   (d) Déterminer l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{U}$ tels que $|f(z)| = 2$.
   (e) Déterminer $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$ et $f(-i)$. En déduire $f(\mathbb{U}_4)$.
   (f) Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
      i. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.
      ii. Montrer que $\omega \in \mathbb{U}_5$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0$.
      iii. Montrer, à l'aide de *ii.*, que $(f(\omega))^2 + f(\omega) - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
4. On considère l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\}$.
   (a) Que représente géométriquement l'ensemble D ?
   (b) Montrer que si $z, z' \in D$ alors $zz' \in D$. En particulier montrer que $zz' \neq 1$.
   (c) Montrer que la restriction $f_{|D}$ de f à D est injective.