DS 2 : Corrigé et « rapport de jury »

- ❀ Durée : 3h
- ❀ Les calculatrices sont interdites
- ❀ Le soin, la rigueur et la rédaction constituent une part importante du barème.
- ❀ Introduire toutes les variables utilisées.
- ❀ Conclure chaque question en encadrant ou soulignant vos résultats.

Exercice 1.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$

1. Montrer que f est 2π-périodique.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et

   $$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sin^2(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) \\ &= \sin^2(x) + \cos(x) \text{ par } 2\pi\text{-périodicité de cos et sin} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   donc f est bien 2π-périodique.

2. Etudier la parité de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-x \in \mathbb{R}$ et

   $$\begin{aligned} f(-x) &= \sin^2(-x) + \cos(-x) \\ &= (-\sin(x))^2 + \cos(x) \text{ par parité de cos et imparité de sin} \\ &= \sin^2(x) + \cos(x) \text{ par parité de la fonction carrée} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   donc f est paire.
   Commentaire : Beaucoup d'erreurs ou d'arnaques dans cette question. Gardez avant tout votre honnêteté intellectuelle !

3. En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de f à $[0; \pi]$.

   Par 2π-périodicité on peut se restreindre à étudier f sur une période. On peut donc par exemple se limiter à l'intervalle $[-\pi; \pi]$. Puisque f est paire il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.

   Commentaire : Ici aussi il fallait être rigoureux et ne pas aller trop vite pour ne pas sauter d'étape.

4. Déterminer la dérivée de f sur $[0; \pi]$.

   La fonction f est dérivable sur $[0; \pi]$ comme produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0; \pi]$,

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) \\ &= \sin(x)(2\cos(x) - 1) \end{aligned}$$

   Commentaire : Lorsque l'on calcule une dérivée, il faut bien avoir en tête que l'on va ensuite devoir étudier son signe. Il est donc judicieux de factoriser au maximum l'expression

5. Résoudre dans l'intervalle $[0; \pi]$ l'inéquation $2\cos(x) - 1 \geq 0$.

   Soit $x \in [0; \pi]$. On a $2\cos(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2}$. Par lecture sur le cercle trigonométrique on trouve $\mathcal{S} = \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

Commentaire : Trop d'élèves ne comprennent pas qu'il faut prendre en compte les variations d'une fonction pour manipuler des inégalités. Ici la fonction cosinus était décroissante sur l'intervalle considéré !

6. En déduire les variations de f sur cet intervalle.

Grâce à la question précédente on sait quand la dérivée de f est positive sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ (on a, pour tout $x \in [0;\pi]$, $\sin(x) \geq 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2\cos(x) - 1$) et on en déduit qu'elle est négative sur le reste de l'intervalle. D'où le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f			$\frac{5}{4}$		
	1	$\nearrow$		$\searrow$	-1

7. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Par parité on en déduit les variations sur $[-\pi;\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
f			$\frac{5}{4}$				$\frac{5}{4}$		
	-1	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\nearrow$		$\searrow$	-1

Puis les variations se répetent par 2π-périodicité.

8. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

On rappelle que l'équation de la tangente en un point $(a; f(a))$ est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

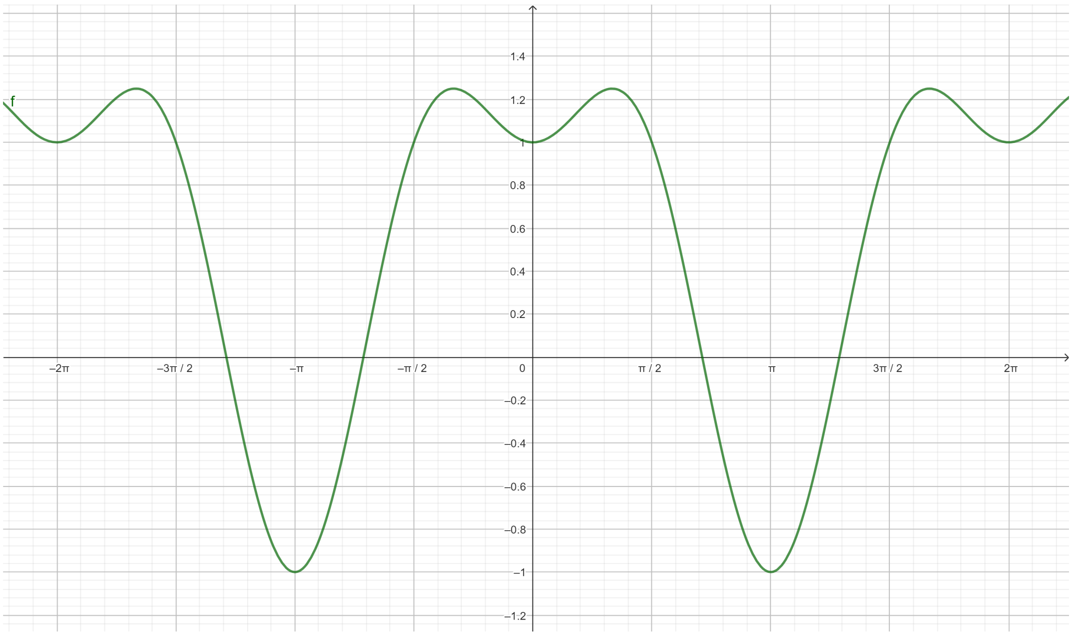
Dans notre cas l'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est :

$$y = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2})$$

c'est-à-dire :

$$y = 1 + (-1)(x - \frac{\pi}{2})$$

9. Tracer la courbe de f entre -2π et 2π.



Exercice 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

*Commentaire : Résoudre une équation d'inconnue x signifie trouver **toutes** les valeurs de x qui vérifient l'équations. Cela n'a pas toujours été effectué correctement pour les équations trigonométriques !*

1. $|2x+3| = |5-3x|$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
L'égalité $2x+3 = 5-3x$ est équivalente à :

$$\begin{array}{ccc} 2x+3 = 5-3x & \text{ou} & 2x+3 = 3x-5 \\ 5x = 2 & \text{ou} & 8 = x \\ x = \dfrac{2}{5} & \text{ou} & x = 8 \end{array}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc } \left\{\frac{2}{5}, 8\right\}}$

Commentaire : Ici les valeurs absolues sont présentes sur les deux termes de l'équations donc il n'y a pas de précautions particulières à prendre, on peut raisonner par équivalence.

2. $|2x+1| = 3x-4$

Analyse :
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $2x+1 = 3x-4$, alors on a :

$$\begin{array}{ccc} 2x+1 = 3x-4 & \text{ou} & -2x-1 = 3x-4 \\ 5 = x & \text{ou} & 3 = 5x \\ x = 5 & \text{ou} & x = \dfrac{3}{5} \end{array}$$

Synthèse :
On vérifie si les solutions trouvées sont solution de l'équation de départ.
La valeur $x = 5$ est bien solution de l'équation, mais $3 \times \frac{3}{5} - 4 = \frac{-11}{5} < 0$, et ne peut donc pas être égal à $2 \times \frac{3}{5} + 1$. $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de cette équation est donc } \{5\}}$

Commentaire : Trop d'élèves oublient que, lorsque l'on ne résout pas par équivalence mais seulement par implications successives, il faut ensuite vérifier si les candidats trouvés sont solutions.

3. $\frac{2x-5}{2x-4} \leq \frac{x-2}{x-3}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
On a

$$\frac{2x-5}{2x-4} \leq \frac{x-2}{x-3} \iff 0 \leq \frac{x-2}{x-3} - \frac{2x-5}{2x-4} \iff 0 \leq \frac{(x-2)(2x-4)-(2x-5)(x-3)}{(x-3)(2x-4)} \iff 0 \leq \frac{3x-7}{(x-3)(2x-4)}$$

Dressons le tableau de signes des termes qui apparaissent dans cette dernière expression :

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{3}$		3		$+\infty$
$3x-7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{3x-7}{(x-3)(2x-4)}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc }]2;\frac{7}{3}]\cup]3;+\infty[}$

Commentaire : Certaines (rares mais existantes) copies oublient que l'on ne peut pas multiplier les deux termes d'une inégalité par une expressions qui dépend de x dont on ne connait pas le signe ! Un bon vieux tableau de signe est un très bon moyen de s'en sortir sans faire d'erreur.

4. $\sin(2x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'après le cours, cette équation est équivalente à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{array}{ccc} 2x = 0 + 2k\pi & \text{ou} & 2x = \pi - 0 + 2k\pi \\ x = k\pi & \text{ou} & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc } \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} - k\pi; k \in \mathbb{Z}\}}$

Commentaire : Il fallait utiliser le cours. Ceux qui ont fait autrement ont souvent oublié beaucoup de solutions !!

5. $\sqrt{2}\sin(3x) + 1 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation est équivalente à :

$$\sin(3x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or, $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4})$, donc l'équation est équivalente à $\sin(3x) = \sin(-\frac{\pi}{4})$. D'après le cours, ceci revient à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{array}{ccc} 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{ou} & 3x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} & \text{ou} & x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc } \{-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}}\cup\{\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\}$.

Commentaire : Il fallait utiliser le cours. Ceux qui ont fait autrement ont souvent oublié beaucoup de solutions !!

6. $\cos(2x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'après le cours, cette équation est équivalente à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad 2x = -x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc } \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}\}.}$

Commentaire : Il fallait utiliser le cours. Ceux qui ont fait autrement ont souvent oublié beaucoup de solutions!!

Exercice 3.

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Justifier, avec un raisonnement graphique, que l'équation $\tan(x) = k$ admet exactement une solution dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, la fonction tan est strictement croissante. De plus, elle admet des asymptotes verticales en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{2}$. La droite horizontale d'équation $y = k$ intersecte donc le graphe de la fonction tan exactement une fois dans cet intervalle. $\boxed{\text{Le point d'intersection détermine alors une unique solution de l'équation } \tan(x) = k.}$

2. Soit $\theta \in \left]-\pi; \pi\right[$. Montrer que
   (a) $\sin(\theta) = \dfrac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}$
   (b) $\cos(\theta) = \dfrac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}$

Tout d'abord, puisque $\theta \in]-\pi; \pi[$, on sait que $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: $\tan(\frac{\theta}{2})$ est donc bien définie. De plus, $1 + \tan^2(\frac{\theta}{2}) \geq 1$, donc les quotients sont aussi bien définis.
D'une part, on a :

$$\frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \frac{2\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}}{1+\frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}} = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)+\sin^2(\theta/2)} = \frac{\sin(2\frac{\theta}{2})}{1} = \sin(\theta)$$

Donc on a bien $\boxed{\sin(\theta) = \dfrac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}}$.

D'autre part :

$$\frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \frac{1-\frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}}{1+\frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}} = \frac{\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)+\sin^2(\theta/2)} = \frac{\cos(2\frac{\theta}{2})}{1} = \cos(\theta)$$

Donc on a bien $\boxed{\cos(\theta) = \dfrac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}}$.

3. Bonus : En déduire qu'il existe une infinité de points du cercle trigonométrique dont les deux coordonnées sont rationnelles.

Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, notons θ_k l'unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\tan(\theta) = k$ dont l'existence et l'unicité sont assurées par (1). Posons ensuite A_k le point du cercle trigonométrique coordonnées $(\cos(2\theta_k), \sin(2\theta_k))$. D'après (2), pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cos(2\theta_k) = \frac{1-k^2}{1+k^2}$ et $\sin(2\theta_k) = \frac{2k}{1+k^2}$, qui sont des nombres rationnels puisque $k \in \mathbb{Z}$.
Reste à vérifier que tous les A_k sont distincts. Soient donc $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $A_k = A_l$. On sait alors que $\cos(2\theta_k) = \cos(2\theta_l)$ et que $\sin(2\theta_k) = \sin(2\theta_l)$. Comme $2\theta_k, 2\theta_l \in -\pi\pi$, ceci entraine que $2\theta_k = 2\theta_l$. En particulier, $\theta_k = \theta_l$, et donc $k = \tan(\theta_k) = \tan(\theta_l) = l$. Les points sont donc bien tous distincts :

$\boxed{\text{il existe une infinité de points du cercle trigonométrique dont les deux coordonnées sont rationnelles}}$

4. Bonus : Démontrer qu'il existe une infinité de triplets d'entiers positifs (a, b, c), non proportionnels entre eux, et tels que
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $a_k = 2k$, $b_k = 1 - k^2$ et $c_k = 1 + k^2$, qui sont des entiers. De sorte que, avec les notations de (3), on a $\frac{a_k}{c_k} = \cos(2\theta_k)$ et $\frac{b_k}{c_k} = \sin(2\theta_k)$.
D'une part, pour tout entier k, on sait que $\cos^2(\theta_k) + \sin^2(\theta_k) = 1$, donc $\frac{a_k^2}{c_k^2} + \frac{b_k^2}{c_k^2} = 1$, d'où $a_k^2 + b_k^2 = c_k^2$.
D'autre part, si deux triplets de cette forme étaient proportionnels, les points correspondants de coordonnées $(\cos(2\theta_k), \sin(2\theta_k))$ seraient égaux, mais, dans la question (3), on a démontré qu'ils étaient tous différents. Il existe donc une

$\boxed{\text{infinité de triplets d'entiers positifs } (a, b, c) \text{, non proportionnels entre eux tels que } a^2 + b^2 = c^2.}$

Exercice 4. *Calculs algébriques.*
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

1. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \quad \text{par linéarité}\\ &= \ln(n+1) - \ln(2)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) - \ln(2)}$.

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \quad \text{par linéarité}\\ &= \ln(1) - \ln(n)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\ln(n)}$.

3. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \quad \text{par linéarité de la somme}\\ &= -\ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(2)}$.

Commentaire : Fait en cours de musculation la veille. Tout le monde aurait du savoir le faire !

Exercice 5. *Fonctions majorées.*

Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est *majorée sur* E si l'ensemble $\{f(x),\ x \in E\}$ est majoré, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leq M.$$

Un tel réel M est appelé majorant de f.

Dans le cas où f est majorée, on appelle borne supérieure de f, notée $\sup\limits_{x\in E} f(x)$, le plus petit des majorants de f.

1. Montrer que la fonction identité $id_{\mathbb{R}} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.

Si la fonction identité id était majorée, la proposition suivante serait Vraie :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad id(x) \leq M.$$

On va montrer que cette proposition est Fausse en montrant que sa négation est Vraie :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\quad id(x) > M.$$

Soit $M \in \mathbb{R}$. Il suffit de prendre un réel x strictement plus grand que M. Par exemple prenons $x = M+1$. On a $id(x) = x = M+1 > M$ et on a bien trouvé un réel x tel que $x > M$.

2. Montrer que la fonction sin est majorée sur $\mathbb{R}$ et préciser sa borne supérieure.

Pour tout réel x, on a, d'après le cours :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

En particulier, sin est majorée par 1. De plus on a $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. En particulier ce majorant est atteint par la fonction sin. On en déduit que 1 est le minimum et donc aussi le plus petit des majorants, et il s'agit donc la borne supérieure de sin sur $\mathbb{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sin(x) = 1.$$

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ majorées.

3. Montrer que $f+g$ est majorée et que

$$\sup_{x\in E}\left(f(x)+g(x)\right) \leq \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x).$$

Soit $x \in E$. Par définition de la borne supérieure, on a : $f(x) \leq \sup\limits_{x\in E} f(x)$ et $g(x) \leq \sup\limits_{x\in E} g(x)$. Cela implique l'inégalité suivante :

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \leq \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x).$$

Ainsi $f+g$ est majorée par $\sup\limits_{x\in E} f(x) + \sup\limits_{x\in E} g(x)$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on en déduit que :

$$\sup_{x\in E}(f+g)(x) \leq \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x).$$

4. Donner un exemple pour lequel l'inégalité précédente est stricte.

On peut considérer les fonctions $f : x \longmapsto \cos^2(x)$ et $g : x \longmapsto \sin^2(x)$. On a pour tout réel x :

$$f(x)+g(x) = 1.$$

Ainsi

$$\sup_{x\in E}(f+g)(x) = 1.$$

Mais

$$\sup_{x\in E} f(x) = 1 = \sup_{x\in E} g(x).$$

Finalement :

$$\sup_{x\in E}(f+g)(x) = 1 < \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x) = 2.$$

Exercice 6. *Borne supérieure.*
Déterminer la borne supérieure de l'ensemble $\{|x-1|,\ x \in]-1,1[\}$.

Trouvons un encadrement de $|x-1|$ pour $x \in]-1;1[$. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$-1 < x < 1 \iff -2 < x-1 < 0$$

On en déduit que si $x \in]-1,1[$ alors $0 < |x-1| < 2$. Cela sous-entend que l'ensemble $E = \{|x-1|,\ x \in]-1,1[\}$ est borné (inférieurement par 0 et supérieurement par 2). Cet ensemble est non vide et majoré donc admet une borne supérieure $\sup(E)$. On va montrer que la borne supérieure de l'ensemble est 2.
2 est un majorant de E. Or $\sup(E)$ est le plus petit des majorants de E donc $\sup(E) \leq 2$.
De plus, comme $\sup(E)$ est un majorant de E on a : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$|x-1| < \sup(E)$$

On a $\lim_{x\to -1} |x-1| = 2$ donc en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$2 \leq \sup(E)$$

Conclusion : par double inégalité on obtient

$$\sup(E) = 2$$