DS 3 corrigé

Exercice 1

1.

2.

3. Déterminons une équation cartésienne de chacune de ces droites.
D_1 admet pour équation cartésienne
$$x + y - 1 = 0$$
En exprimant t en fonction de x ($t = 1 - x$) et en substituant cette expression dans la deuxième équation, on trouve que $y = 2x + 2$.
D_2 admet donc pour équation cartésienne
$$2x - y + 2 = 0$$
D_3 admet pour équation cartésienne
$$x - 2y - 1 = 0$$
.
Notons $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des vecteurs directeurs de D_1, D_2 et D_3. On peut choisir
$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
On a
$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_1, \vec{u}_3) &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$
Donc D_1 et D_3 ne sont pas parallèles.
De même
$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$
Donc D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.
Enfin
$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_1, \vec{u}_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$
Donc D_2 et D_3 ne sont pas parallèles.
Conclusion : aucun des couples de droites n'est constitué de droites parallèles.

4. Les coordonnées de A sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lll} x+y-1 & = & 0 \\ x-2y-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

On a donc $A(1;0)$.

Les coordonnées de B sont donc solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lll} x+y-2 & = & 0 \\ 2x-y+2 & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -\frac{1}{3} \\ y & = & \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

On a donc $B(-\frac{1}{3};\frac{4}{3})$.
Les coordonnées de C sont donc solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lll} 2x-y+2 & = & 0 \\ x-2y-1=0 & & \end{array}\right.$$

qui est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{lll} -y+4y+2+2 & = & 0 \\ x-2y-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lll} y & = & -\frac{4}{3} \\ x & = & -\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

On a donc $C(-\frac{5}{3};-\frac{4}{3})$.

5. L'aire du triangle ABC est égale à

$$\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|$$

Or

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

On a donc $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{48}{9}$ ce qui donne une aire égale à $\frac{8}{3}$.

6. On constate que $BC=CA=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

7. La médiatrice de $[AB]$ est la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le milieu I de $[AB]$. On a

$$I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$$

La médiatrice de $[AB]$ étant perpendiculaire à (AB), elle admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal. Soit $M \in \mathcal{P}$. On a donc :

$$\begin{aligned} M \in D_4 &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \frac{1}{3}) \times \frac{-4}{3} + (y - \frac{2}{3}) \times \frac{4}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow 12x - 12y + 4 = 0 \end{aligned}$$

La médiatrice de $[AB]$ admet donc pour équation $12x - 12y + 4 = 0$.
On a $12x_C - 12y_C + 4 = 12 \times \frac{-5}{3} - 12 \times \frac{-4}{3} + 4 = 0$ donc $C \in D_4$.

Exercice 2.
On donne dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
$A(1; -2)$, $B(-3; 4)$ et $(D) : 3x - y + 4 = 0$

1. $(0; 4) \in D$ et $(1; 7) \in D$.
2. Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB). $\overrightarrow{AB}(-4; 6)$ est un vecteur directeur de (AB) Donc

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (AB) &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -4 \\ y+2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x + 4y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 2y + 1 = 0 \end{aligned}$$

   Une équation cartésienne de (AB) est donc $3x + 2y + 1 = 0$.
3. On note $I(x, y)$

$$\begin{aligned} I \in (AB) \cap D &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

   On a donc $I(-1; 1)$.
4. on a $J(0; 4)$ et on peut calculer la distance de J à la droite (AB).

$$d(J, (AB)) = \frac{|3 \times 0 + 2 \times 4 + 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$

   et on trouve $d(J, (AB)) = \frac{9\sqrt{13}}{13}$
5. On a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 13 \end{aligned}$$

   $\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre $\Omega(-1; 1)$ de rayon $\sqrt{13}$
6. La tangente au cercle en $K(-4, -1)$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega K}(3; 2)$ et a donc une équation de la forme $3x + 2y + d = 0$. De plus cette tangente passe par le point K ce qui nous permet de trouver $d = 14$. L'équation de cette tangente est donc $3x + 2y + 14 = 0$.

Exercice 3. *6 points*Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^{1-x}$$

et h la fonction définie par

$$h(x) = -\ln(x) + \frac{1}{x} - 1$$

1. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}+^*$,
$$h'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$$
La fonction h est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}+^*$.
Or $h(1) = 0$. On a donc pour tout $x \in]0; 1[$, $h(x) > 0$ et pour tout $x > 1$, $h(x) < 0$.
2. L'expression algébrique de f est $f(x) = e^{(1-x)\ln(x)}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} + *$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}+^*$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\ln(x) + (1-x) \times \frac{1}{x}\right) e^{(1-x)\ln(x)} \\ &= h(x)e^{(1-x)\ln(x)} \end{aligned}$$
La dérivée de f est donc du signe de h. On a donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, 1[$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x > 1$.
4. On a pour tout $x > 0$,
$$f(x) = e^{\ln(x) - x\ln(x)}$$
or
$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$
et
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$
donc
$$\lim_{x\to 0} \ln(x) - x\ln(x) = -\infty$$
et donc
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$
De plus
$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$
et
$$\lim_{x\to +\infty} (1-x) = -\infty$$
donc
$$\lim_{x\to +\infty} (1-x)\ln(x) = -\infty$$
donc
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$
On peut donc compléter le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Exercice 4 Cours

Exercice 5TD