DS 3 : le vendredi 8 novembre 2024

Commentaire : Dans ce devoir il y avait trois types de questions :

1. *Les questions de cours ou d'application directe du cours que tout le monde aurait dû réussir facilement, par cœur ou par automatisme de calcul. Ceux qui n'ont pas réussi ces questions doivent se mettre au travail, s'organiser mieux (surtout que le DS arrivait après deux semaines de vacances propices aux révisions), et maîtriser les méthodes du cours. Le chapitre sur les nombres complexes est central dans le programme de première et deuxième année mais ne sera pas revu en classe, c'est donc maintenant à vous de le travailler par vous même !*
2. *Les questions plus difficiles, qui demandaient de bien maîtriser les méthodes et de bien les adapter aux questions du devoir. Ceux qui ont réussi les questions de type 1 doivent maintenant gagner en maturité mathématique (avec de l'entraînement +++ !!) pour arriver à aller plus loin dans ce type de questions. C'est une question d'entraînement en amont du devoir et de mental le jour du devoir (s'accrocher pour dépasser les difficultés rencontrées). C'est dans ce type de difficultés qu'on progresse !*
3. *Les questions "grappillage de point" qui sont des questions d'application des questions de type 2, qui pouvaient être traitées en utilisant les résultats des questions précédentes même si on ne les avait pas réussi. Ces questions, comme les questions de type 1, doivent absolument être traitées et réussies par tous les élèves. La progression sera ensuite d'arriver à faire de plus en plus de questions de type 2.*

Exercice 1. *Une somme.*

L'objectif de cet exercice est de calculer de deux façons différentes, la somme :

$$S(p,n)=\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$$

où $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[\![0,n]\!]$.

1. Calculer $S(n,n)$ où $n\in\mathbb{N}$.

   Commentaire : Il fallait voir qu'il n'y avait qu'un seul terme dans cette somme. Cette question a été globalement réussi, contrairement aux deux suivantes.

   Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $S(n,n)=\displaystyle\sum_{k=n}^{n}\binom{k}{n}=\binom{n}{n}$ donc $\boxed{S(n,n)=1}$.

2. Calculer $S(0,n)$ où $n\in\mathbb{N}$.

   Commentaire : Certains ne comprennent pas comment remplacer p et n. Dans ce type de questions, essayez de bien comprendre la signification de chaque variable (indice de départ de la somme, indice final de la somme, variable muette,..), combien de termes il y a dans la somme puis de bien expliciter chaque terme. Certains ne pensent pas à remplacer $\binom{k}{0}$ par 1 ...
   Enfin, certains ne savent toujours pas que dans une somme où l'indice varie de 0 à n, il y a $n+1$ termes. Ces choses là doivent être acquise une fois pour tout et jusqu'au concours.

   On a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\boxed{\binom{k}{0}=1}$ donc $\boxed{S(0,n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}1=n+1}$.

3. Calculer $S(1,n)$ où $n\in\mathbb{N}$.

   Commentaire : Idem que précédement. Il faut bien comprendre la signification de la somme (il y a $n+1$ termes ici aussi) et remarquer que $\binom{k}{1}=k$ (soit on le sait par coeur soit on le retrouve avec les factorielles qui se simpifient !)

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\binom{k}{1} = k}$ donc $\boxed{S(1,n) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

4. Point de vue télescopique. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$.
   (a) Justifier que pour $k \in [\![p,n]\!]$, on a :
$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$$

Commentaire : Ici on pouvait utiliser la formule de Pascal sans la démontrer (c'est du cours). Certains ont tout démontré alors que ce n'était pas ce que l'énoncé nous invitait à faire, il ont perdu beaucoup de temps. Il faut essayer de décoder l'énoncer pour voir ce qui va nous rapporter un maximum de points sans trop se fatiguer !

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$. La formule de Pascal nous dit que pour tout $k \in [\![p,n]\!]$ on a
$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}.$$

On en déduit directement $\boxed{\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}}$.

   (b) Calculer en utilisant la formule précédente $S(p,n)$.

Commentaire : Certains arrivent au bout du calcul mais ne pensent pas à simplifier $\binom{p}{p+1}$ qui vaut 0. Le mot linéarité de la somme était attendu. Le mot télescopique était facultatif (mais il fallait utiliser cette technique).

D'après la question précédente, on a :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \\
&= \sum_{k=p}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p+1} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{\ell=p+1}^{n+1} \binom{\ell}{p+1} - \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p+1} && \text{en posant } \ell = k+1 \text{ dans la première somme} \\
&= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} && \text{les sommes étant télescopiques} \\
&= \binom{n+1}{p+1} && \text{car } p < p+1
\end{aligned}$$

Finalement on a trouvé $\boxed{\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$.

5. Méthode par récurrence : Montrer que la proposition
$$P(n) : « \ \forall p \in [\![0,n]\!], \ S(p,n) = \binom{n+1}{p+1} \ »$$
est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Commentaire : Peu d'élèves ont bien compris que la propriété $\mathcal{P}(n)$ comportait un $\forall p \in [\![0;n]\!]$. Dans l'hérédité il fallait donc supposer $\mathcal{P}(n)$ et commencer à montrer $\mathcal{P}(n+1)$ en disant « soit $p \in [\![0;n+1]\!]$ ». Il fallait ensuite distinguer le cas où $p \leq n$ (et où $\mathcal{P}(n)$ s'applique) et le cas où $p = n+1$ (plus facile mais à traiter quand même !). En conclusion : de la rigueur !!

$*$ Pour $n = 0$, on prend $p = 0$ (pas le choix !), et on a $S(0,0) = 1$ d'après la question 2 et $\binom{1}{1} = 1$. Ainsi $P(0)$ est vraie.
$*$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Soit $p \in [\![0, n+1]\!]$.
Si $p = n+1$ alors on a $S(p, n+1) = S(n+1, n+1) = 1$ d'après 1 et $\binom{n+2}{n+2} = 1$ donc l'égalité est vérifiée dans ce cas.
Si $p \leq n$ alors on peut utiliser l'hypothèse de récurrence $P(n)$. On a :

$$\begin{aligned} S(p, n+1) &= \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} \\ &= \left(\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}\right) + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \qquad \text{d'après HR} \\ &= \binom{n+2}{p+1} \qquad \text{par la formule de Pascal} \end{aligned}$$

On en déduit que $P(n+1)$ est vraie.
$*$ Par récurrence, $\boxed{P(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

6. Application : pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

   (a) Vérifier que pour $k \in \mathbb{N}$, on a

   $$k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$$

   Commentaire : Simple calcul.

   Calcul immédiat.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$S_n = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

   Commentaire : Question peu traitée. Il fallait remarquer que $k(k-1)(k-2) = 6\binom{k}{3}$, que $k(k-1) = 2\binom{k}{2}$ et que $k = \binom{k}{1}$

Pour effectuer le calcul, on peut supposer $n \geq 3$. Par linéarité de la somme et par la formule précédente, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) + 3\sum_{k=2}^{n} k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= 6\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3} + 6\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} \\
&= 6S(3,n) + 6S(2,n) + S(1,n) \\
&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{S_n = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}}$. On constate que la formule est encore vraie pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

(c) Retrouver la formule connue : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Commentaire : Question peu traitée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= 6\frac{(n+1)!}{(n-3)!4!} + 6\frac{(n+1)!}{(n-2)!3!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} \\
&= \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)(n)(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2) + 4(n+1)(n)(n-1) + 2(n+1)n}{4} \\
&= \frac{(n+1)n\left((n-1)\left((n-2)+4\right)+2\right)}{4} \\
&= \frac{(n+1)n\left((n-1)(n+2)+2\right)}{4} \\
&= \frac{(n+1)n\left(n^2+n\right)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2n^2}{4}
\end{aligned}$$

On en déduit $\boxed{S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$.

Exercice 2. *Equations dans $\mathbb{C}$.*
Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = 3 - 4i$.

   Commentaire : On cherchait les racines carrées complexes de $3-4i$. Pas besoin de calculer le discriminant ! Appliquer directement la méthode algébrique avec $Z = 3 - 4i$. La maitrise du cours n'est pas présente pour tout les élèves. IL faut se mettre au travail.

   $$\mathcal{S} = \{2 - i; -2 + i\}$$

2. $z^2 - (3 + 2i)z + 3 + 9i = 0$.

   Commentaire : Ici il était obligatoire de calculer le discriminant Δ, puis de cherche δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

   $$\mathcal{S} = \{3i; 3 - i\}$$

3. $z^2 - (1 + i)z - 14 + 23i = 0$.

   Commentaire : Questions aux calculs difficiles pour occuper les plus rapides ;-)
   Bravo à ceux qui ont réussi à trouver que $\sqrt{11236} = 106$.
   Ceux qui n'ont pas abouti mais qui maitrisaient la méthode ont eu la quasi totalité des points.
   Certains ont cherché une solution réelle ou imaginaire pure (en séparant parties réelle et imaginaire de l'équation) mais cela n'aboutissait pas car il n'y en avait pas !

   $$\mathcal{S} = \{5 - 2i; -4 + 3i\}$$

4. $z^3 = 1$.

   Commentaire : Question de cours. Ceux qui n'ont pas réussi doivent absolument retravailler le cours sur les complexes paragraphe III.

   $$\mathcal{S} = \{1, j, j^2\}$$

5. $z^4 = i$.

   Commentaire : Question d'application directe du cours. Ceux qui n'ont pas réussi doivent absolument retravailler le cours sur les complexes paragraphe III.

   $$\mathcal{S} = \{e^{i\frac{\pi}{8}}; e^{i\frac{5\pi}{8}}; e^{i\frac{9\pi}{8}}; e^{i\frac{13\pi}{8}}\}$$

6. $z^3 - (6 + 2i)z^2 + (11 + 16i)z - 6 - 24i = 0$ (indication : il y a une solution réelle).

   Commentaire : Ici il fallait utiliser l'indication pour trouver une première solution et factoriser par ($z -$ « la solution »)

   $$\mathcal{S} = \{2; 3i; 4 - i\}$$

Exercice 3. *Nombres complexes appliqués à un calcul de somme.*
Soit $x \in]0, 2\pi[$ et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose :

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

1. Montrer que

$$Z_n = e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Commentaire : Questions traitée plusieurs fois depuis le début de l'année, qui est un classique à maitriser absolument.

$$\begin{aligned}
Z_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k && \text{par de Moivre} \\
&= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} && \text{formule somme car } x \in]0, 2\pi[\text{ et de Moivre} \\
&= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} && \text{factorisations demi-angle} \\
&= e^{i\frac{n}{2}x} \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} && \text{simplification et formules d'Euler} \\
&= e^{i\left(\frac{nx}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

2. (a) Justifier que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Commentaire : Question facile où il fallait isoler le premier et le dernier terme d'une somme.

Comme $\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{n}{\pi}n) = \sin(\pi) = 0$, les deux termes ajoutés sont nuls et donc directement on a $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

(b) En prenant un réel x judicieusement choisi, donner le lien entre S_n et Z_n puis montrer que

$$S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Commentaire : Nombreux sont ceux qui ont trouvé le bon x, mais après le lien avec la partie imaginaire de Z_n n'est pas toujours bien fait.

En prenant $x = \frac{\pi}{n} \in]0, 2\pi[$, on a $S_n = Im(Z_n)$ donc d'après la question 1. on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sin\left(\frac{n\frac{\pi}{n}}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\frac{\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{n}}{2}\right)} \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2n}+\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} && \text{car } \sin(\pi/2) = 1 \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} && \text{formule d'addition} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$.

(c) En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

<u>Commentaire</u> : Question facile d'application où certains ont judicieusement gagné des points même sans avoir fait les questions précédentes. Il faut avoir une vision globale du sujet pour essayer de distinguer les questions que vous êtes capables de faire selon votre niveau d'entrainement le jour du DS.

Prenons $n = 4$. On a bien $n \geq 2$ et d'après la question précédente

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = S_4.$$

Or

$$S_4 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 1.$$

On en déduit que $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1}$.

(d) Montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

puis déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$$

<u>Commentaire</u> : Nombreux sont ceux qui ont pensé au taux d'accroissement mais peu l'ont correctement rédigé. Cela fait partie des méthodes à ne pas oublier. La deuxième limite n'a été donnée que dans environ un quart des copies.

Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$. On a :

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0}$$

est le taux d'accroissement de la fonction tan entre 0 et x. Or tan est dérivable en 0 donc son taux d'accroissement admet une limite finie qui vaut $\tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$. Ainsi $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1}$.

De plus pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &= \frac{1}{n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \end{aligned}$$

Or $\lim \left(\frac{\pi}{2n}\right) = 0$ donc par composée, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1$$

et finalement $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}}$.

Exercice 4. *Problème : Localisation de solutions complexes..*
Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère l'équation suivante (E_n), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + z + 1 = 0 \qquad (E_n)$$

Dans ce problème, on utilisera le résultat suivant (admis) :
Si $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1}x^{p-1} + x^p$ est un polynôme de degré p alors P admet p racines (éventuellement complexes) et si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont ses racines alors on peut factoriser :

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1}x^{p-1} + x^p = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_p).$$

De ce fait, l'équation (E_n) admet précisément n solutions. On s'intéresse dans la suite à la localisation de ses solutions.

Partie I. Cas $n = 2$.

1. Déterminer les racines 3-ième de l'unité.

   Commentaire : Trop d'erreur sur cette question de cours !

   Les racines 3-ième de l'unité sont $\boxed{1, e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } e^{i\frac{4\pi}{3}}}$.

2. Factoriser le polynôme $z^3 - 1$ à l'aide de la formule $a^n - b^n$.

   Commentaire : Idem que précédemment !

   On a directement $\boxed{z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)}$.

3. Déduire des deux questions précédentes les deux solutions de (E_2) : $z^2 + z + 1 = 0$. Préciser leur forme algébrique et vérifier que leur module est strictement inférieur à 2.

   Commentaire : Les questions d'avant permettaient de s'éviter un calcul de discriminant.

   D'après le rappel et la question 1. on a $z^3 - 1 = (z - 1)(z - e^{i\frac{2\pi}{3}})(z - e^{i\frac{4\pi}{3}})$ et d'après la question 2. on a $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ donc les solutions de (E_2) sont $\boxed{e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } e^{i\frac{4\pi}{3}}}$.
   De plus $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces nombres sont des racines 3-ième de l'unité donc de module $1 < 2$.

Partie II. Cas $n = 3$.

4. On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f : t \longmapsto t^3 + t + 1$.
   (a) Dresser le tableau de variations complet de f.

   Commentaire : Beaucoup se lance dans le calcul du discriminant pour trouver le signe de $f'(t)$, or c'est direct, la fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$!

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme polynôme) et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

   $$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0.$$

   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   De plus $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

   (b) Justifier que l'équation (E_3) : $f(t) = 0$ possède une et une seule solution réelle. On la note r et en calculant $f(-1)$ et $f(-1/2)$, vérifier que $r \in]-1, -1/2[$.

   Commentaire : Question plutôt bien réussie.

Puisque f est continue (car dérivable), strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et d'après son tableau de variations, il existe une et une seule valeur de r réelle telle que $f(r)=0$. De plus $f(-1)=-1$ et $f(-1/2)=-1/8-1/2+1>0$. Donc par stricte croissance de f, on a $\boxed{r\in]-1,-1/2[}$.

5. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de (E_3), on ne demande pas de les calculer. On sait que :

$$z^3+z+1=(z-r)(z-z_1)(z-z_2).$$

(a) En développant l'expression précédente, justifier que $z_1+z_2=-r$ et $z_1z_2=-\frac{1}{r}$.

Commentaire : Question guidée d'identification, plutôt bien réussie.

Pour $z\in\mathbb{C}$, on a :

$$z^3+z+1=(z-r)(z-z_1)(z-z_2)$$

ou encore en développant :

$$z^3+z+1=(z-r)(z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2)$$

puis encore :

$$z^3+z+1=z^3-(z_1+z_2+r)z^2+\big(r(z_1+z_2)+z_1z_2\big)z-rz_1z_2.$$

Or deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont les mêmes et ainsi en identifiant les termes en z^2, on a $z_1+z_2+r=0$ et en identifiant les termes constants, on a $-rz_1z_2=1$. Ce qui conduit à $\boxed{z_1+z_2=-r}$ et $\boxed{z_1z_2=-\frac{1}{r}}$.

(b) Montrer que $\frac{1}{2}<|z_1+z_2|<1$ puis $1<|z_1z_2|<2$.

Commentaire : Certains ont bien traité cette question.

Comme $z_1+z_2=-r$ et que $r\in]-1,-1/2[$, on a $-r\in]1/2,1[$ donc $1/2<|r|<1$ puis $\boxed{1/2<|z_1+z_2|<1}$.
De même $-\frac{1}{r}\in]1,2[$ d'où $\left|-\frac{1}{r}\right|\in]1,2[$ c'est-à-dire $\boxed{1<|z_1z_2|<2}$.

6. (a) Montrer que si $|z_1|\geq 2$ alors $|z_2|<1$.

Commentaire : Question correctement traitée dans quelques rares copies.

Si $|z_1|\geq 2$ alors comme $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, on a $|z_1z_2|\geq 2|z_2|$. Mais d'après 5.(b), on a $|z_1z_2|<2$ donc cela implique $\boxed{|z_2|<1}$.

(b) Sans calculer les modules, justifier que $|z_1|\leq|z_1+z_2|+|z_2|$ puis que $|z_1|<1+|z_2|$.

Commentaire : On doit utiliser l'inégalité triangulaire du cours (sans tout redémontrer) ! C'est du cours, il faut la connaitre et l'appliquer !

On écrit $|z_1|=|z_1+z_2-z_2|$ et en appliquant l'inégalité triangulaire à z_1+z_2 et à $-z_2$ on obtient :

$$|z_1|\leq|z_1+z_2|+|-z_2|$$

ou encore $\boxed{|z_1|\leq|z_1+z_2|+|z_2|}$. D'après 5.$(b)$, on a $|z_1+z_2|<1$ d'où $\boxed{|z_1|<1+|z_2|}$.

(c) Montrer enfin que toutes les solutions de (E_3) sont de module strictement inférieur à 2. (Pour les solutions non réelles, on raisonnera par l'absurde en utilisant les deux questions précédentes.)

Si $|z_1| \geq 2$ alors $|z_2| < 1$ d'après (a) et $|z_1| < 1 + |z_2| < 2$ d'après (b). Ce qui est absurde. On en déduit que $|z_1| < 1$. Puis z_1 et z_2 jouant des rôles symétriques, on a de même $|z_2| < 1$. On avait vu aussi que $|r| < 2$. Ainsi $\boxed{\text{toutes les solutions de } (E_3) \text{ sont de module strictement inférieur à } 2}$.

Partie III. Cas $n \geq 2$.

Soit $n \geq 2$.

7. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $\varphi : t \longmapsto t^n - t - 1$ sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et en déduire le signe de φ.

Commentaire : On pouvait traiter cette question facilement.

La fonction φ est dérivable sur $[2, +\infty[$ et pour $t \in [2, +\infty[$, on a :

$$\varphi'(t) = nt^{n-1} - 1.$$

Et comme $t \geq 2$ et $n \geq 2$, on a $\varphi'(t) > 0$. Donc φ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.
De plus $\varphi(2) = 2^n - 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$.
Comme $2^n - 3 > 0$, on en déduit que $\boxed{\varphi(t) > 0 \text{ pour tout } t \in [2, +\infty[}$.

8. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E_n) alors $|z^n| \leq |z| + 1$.

Si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E_n) alors $z^n = -z - 1$. Donc par inégalités triangulaires :

$$|z^n| = |-z - 1| \leq |z| + 1.$$

9. En raisonnant par l'absurde, montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E_n) alors $|z| < 2$.

Si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E_n) et $|z| \geq 2$ alors $\varphi(|z|) > 0$ ce qui revient à dire $|z|^n > |z| + 1$ ou encore $|z^n| > |z| + 1$ ce qui contredit la question précédente. Par l'absurde, on en déduit que si $\boxed{z \text{ est solution de } (E_n) \text{ alors } |z| < 2}$.