DS 4 : corrigé

Exercice 1. *Questions de cours.*
Voir cours

Exercice 2.
On considère dans ce problème la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0;1[$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. (a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} &= x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= x^2 - x + 1\end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Commentaire : Soignez particulièrement les première questions ! Cela est déterminant dans l'appréciation de la copie par le correcteur. Mettez-le de bonne humeur ! !

(b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Justifier, alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} > 0$ En particulier, on peut, pour tout x, calculer la racine carrée de cette expression et donc f est définie sur $\mathbb{R}$. On montre alors (par récurrence facultatif) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.

Commentaire : Question plutôt bien réussie

(c) Déduire de la question 1.(a) que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$

Soit $x \in [0,1]$. On a

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

donc

$$-\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

D'après les variations de la fonction carré, on obtient

$$0 \leq (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$$

et donc

$$\frac{3}{4} \leq (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \leq 1$$

ce qui implique

$$0 \leq x^2 - x + 1 \leq 1$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}+$ on obtient

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

Commentaire : Lorsqu'il est écrit « déduire », il faut le faire ! !

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

Récurrence immédiate à rédiger rapidement.

2. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.
On détaillera les calculs effectués.
Déterminer le tableau de variations de f sur $[0;1]$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur leurs domaines respectifs car

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$$

. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \quad (1)$$

On en déduit

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f	1 ↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗ 1

(b) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant x$

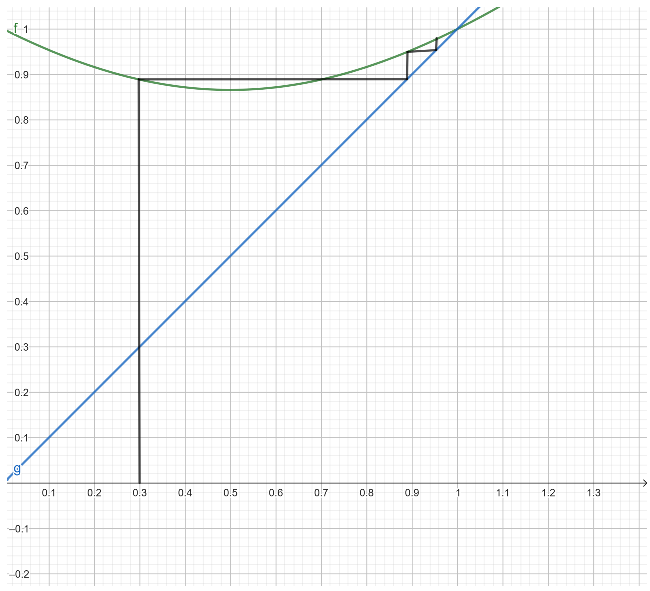
Soit $x \in [0;1]$ En multipliant par la quantité conjuguée :

$$f(x) - x = \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \geq 0$$

Et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x.$$

(c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0,1]$.
On se placera dans un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ et on utilisera l'échelle suivante : 10cm pour 1 unité.
On ferra apparaître la tangente horizontale et la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).
Dans cette question uniquement on suppose $u_0 = \dfrac{1}{4}$; construire à l'aide du graphe précédent les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$



(d) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$,
$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Si $x \in [0,1]$, alors $-\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ et donc $|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$.
Ensuite, d'après 1.a), pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x^2 - x + 1 \leq \frac{3}{4}$$
En utilisant la croissance de la fonction racine carrée, on en déduit que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - x + 1} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$
Enfin, l'inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}+$, on trouve que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$
Pour $x \in [0,1]$, en multipliant par l'inégalité à termes positifs $|2x - 1| \leq 1$ et en divisant par 2, on trouve
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3. (a) Calculer $f(1)$
   (b) Question bonus (pour ceux qui connaissent déjà l'inégalité des accroissements finis). En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$|1 - u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$$

On le verra plus tard ! En justifiant (comme on va apprendre à le faire en janvier) qu'on a bien les hypothèses de l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF), on peut affirmer que :
$$|f(u_n) - f(1)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_n - 1|$$
c a d
$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_n - 1|$$

(c) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ une majoration de $|1-u_n|$ en fonction de n et de $|1-u_0|$.

On a par une récurrrence immédiate pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$$

(d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

On a $|\frac{1}{\sqrt{3}}| < 1$ donc $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$ donc par encadrement $\lim u_n = 1$

Exercice 3.

1. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$, rappeler les définitions de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.

Si $A \in \mathcal{P}(A)$, on a

$$\boxed{f(A) = \{f(x); x \in A\}} = \{y \in F; \exists x \in A; f(x) = y\}$$

. Si $B \in \mathcal{P}(F)$, alors

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in A; f(x) \in B\}}$$

2. (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Soit $a \in A$ et notons $B = f(A) \in \mathcal{P}(F)$. Par définition de l'image directe, $f(a) \in f(A) = B$. Puis, par définition de l'image réciproque par f,comme $f(a) \in B$ on a $a \in f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$.
Donc

$$\boxed{A \subset f^{-1}(f(A))}$$

(b) On suppose f injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in f(A)$. Par définition de l'image directe, il existe alors $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Finalement, comme f est injective, $x = a \in A$. Donc

$$\boxed{f^{-1}(f(A)) \subset A}$$

(c) Soient $a, b \in E$ tels que $f(a) = f(b)$. Posons $A = \{a\}$. Comme $f(a) = f(b)$ et que $a \in A$, on a que $f(b) \in f(A)$. Par définition de l'image réciproque de $f(A)$, on a alors que $b \in f^{-1}(f(A))$. Mais $f^{-1}(f(A)) \subset A$, donc $b \in A = \{a\}$. Donc $b = a$ et $\boxed{f \text{ est injective}}$.

(d) D'après (2.a), on sait que $\forall A \in \mathcal{P}(E)\ A \subset f^{-1}(f(A))$. De plus, d'après (2.b) et (2.c), l'autre inclusion est vraie pour toute partie A si et seulement si f est injective.
On vient de démontrer que

$$\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } \forall A \in \mathcal{P}(E)\ A = f^{-1}(f(A)).}$$

3. (a) Soit $B \in \mathcal{P}(F)$ et soit $b \in f(f^{-1}(B))$. Par définition de l'image directe, il existe $a \in f^{-1}(B)$ tel que $b = f(a)$. Mais alors, par définition de l'image réciproque, comme $a \in f^{-1}(B)$ on a $f(a) \in B$. Finalement $b = f(a) \in B$. Donc

$$\boxed{f(f^{-1}(B)) \subset B}$$

(b) On suppose que f est surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$ et soit $b \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = b$. Comme $f(x) = b \in B$, on a alors que $x \in f^{-1}(B)$. Mais alors, par définition de l'image directe, comme $x \in f^{-1}(B)$, on a $b = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Donc $\boxed{B \subset f(f^{-1}(B))}$.

(c) On suppose que $\forall B \in \mathcal{P}(F)$, $B \subset f(f^{-1}(B))$. Montrons que f est surjective. Soit $b \in F$, et posons $B = \{b\}$. Comme $B \subset f(f^{-1}(B))$ et que $B \neq \emptyset$, en particulier on a que $f(f^{-1}(B)) \neq \emptyset$, puis que $f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Par définition de l'image réciproque, il existe alors $a \in E$ tel que $f(a) \in B$, mais comme $B = \{b\}$ on a alors que $f(a) = b$. L'élément b admet donc qu moins un antécédent par f.

$$\boxed{f \text{ est surjective}}$$

(d) D'après (3a), on sait que $\forall B \in \mathcal{P}(F)\ f(f^{-1}(B)) \subset B$. De plus, d'après (3b) et (3c), l'autre inclusion est vraie si et seulement si f est surjective.
On vient de démontrer que

$$\boxed{f \text{ est surjective si et seulement si } \forall B \in \mathcal{P}(F)\ f(f^{-1}(B)) = B.}$$

Exercice 4. *Une application complexe. 7 points.*
On s'intéresse à la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

1. Deux écritures.
   (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $f(a + ib)$ sous forme algébrique.

   Commentaire : Certains ne savent pas mettre un nombre complexe au carré !

   On a $f(a + ib) = (a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$ donc $\boxed{f(a + ib) = a^2 - b^2 + i2ab}$.

   (b) Soit $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}$. Exprimer $f(re^{i\theta})$ sous forme exponentielle.

   Commentaire : Certains oublient d'élever r au carré. D'autres ne mentionnent pas l'utilisation de la formule de De Moivre.

   On a $f(re^{i\theta}) = \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2\left(e^{i\theta}\right)^2$ et d'après la formule de De Moivre, $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{i2\theta}$. Donc $\boxed{f(re^{i\theta}) = r^2 e^{i2\theta}}$.

2. Calculer $f(0)$, $f(-1)$ et $f(i)$.

   Commentaire : Bien faite dans presques toutes les copies !

   On a $\boxed{f(0) = 0}$, $\boxed{f(-1) = 1}$ et $\boxed{f(i) = -1}$.

3. L'application f est-elle injective ?

   Commentaire : En général bien traitée.

   L'application $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$ car $f(-1) = 1 = f(1)$.

4. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ non nul.
   (a) Ecrire ω sous forme exponentielle.

   Commentaire : Ceux qui ont compris la question l'ont réussie.

   Comme $\omega \neq 0$, il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{\omega = |\omega|e^{i\theta}}$.

   (b) Déterminer $f^{-1}(\{\omega\})$ et écrire les éléments de $f^{-1}(\{\omega\})$ sous forme exponentielle.

   Commentaire : Question très mal traitée sauf dans de rares copies. Pourtant cette question avait déjà été traité dans le cours (bien qu'écrite différement). Il faut arriver à prendre du recul sur l'énoncé pour reconnaitre les sujets déjà traité en cours.

On a : $f^{-1}(\{\omega\}) = \left\{z \in \mathbb{C},\quad z^2 = \omega\right\}$. Or $z^2 = \omega$ admet deux solutions : $z_1 = \sqrt{|\omega|}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -\sqrt{|\omega|}e^{i\frac{\theta}{2}}$. La première z_1 est sous forme exponentielle et la forme exponentielle de z_2 est $z_2 = \sqrt{|\omega|}e^{i\pi}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{|\omega|}e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$. Ainsi $\boxed{f^{-1}(\{\omega\}) = \left\{\sqrt{|\omega|}e^{i\frac{\theta}{2}}, \sqrt{|\omega|}e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}\right\}}$.

(c) En déduire que f est surjective vers $\mathbb{C}$. Quelle différence peut-on remarquer avec la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$?

Commentaire : Beaucoup ont utilisé la question précédente (ce qui est judicieux) sans rajouter le cas $\omega = 0$ qui n'est pas traité dans la question précédente.

On vient de voir que pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ non nul, on a $f^{-1}(\{\omega\}) \neq \emptyset$. De plus 0 admet un antécédent par f (qui est 0). Ainsi tout nombre complexe de $\mathbb{C}$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{C}$ par f. On en déduit que $\boxed{f \text{ est surjective sur } \mathbb{C}}$. La fonction g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas non plus surjective vers $\mathbb{R}$.

5. On considère les ensembles $D = \{z \in \mathbb{C},\ \arg(z) \in [0, \pi[\}$.

(a) Représenter D dans le plan complexe.

Commentaire : L'interprétation géométrique des complexes n'est pas maîtrisée. Certains ont pensé à un cercle, ce qui est faux. Certains ont bien vu qu'il s'agissait d'un demi-plan mais ce n'était pas clair du tout dans leur schéma : il faut bien préciser quelle partie du bord est incluse ou non !

Il s'agit du demi-plan complexe délimité par l'axe des réels. Le demi-axe $\mathbb{R}_+^*$ est inclus tandis que le demi-axe $\mathbb{R}_-$ est exclu.

(b) Montrer que la restriction $f_{|D}$ est injective.

Commentaire : Question souvent menée avec arnaques (ce qui n'est pas très apprécié).

Soit $z_1, z_2 \in D$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. Or

$$\begin{aligned} z_1^2 = z_2^2 &\iff z_1^2 - z_2^2 = 0 \\ &\iff (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0 \\ &\iff z_1 = z_2 \quad \text{ou} \quad z_1 = -z_2 \\ &\iff z_1 = z_2 \quad \text{ou} \quad z_1 = e^{i\pi}z_2 \end{aligned}$$

Comme $z_2 \in D$, on a $\arg(z_2) \in [0, \pi[$ donc le cas où $z_1 = e^{i\pi}z_2$ ne se produit pas : sinon on aurait $\arg(z_1) = \pi + \arg(z_2) \in [\pi, 2\pi[$ et cela contredit le fait que $z_1 \in D$. On en déduit que $z_1 = z_2$. D'où $\boxed{f_{|D} \text{ est injective}}$.

6. On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$.

(a) Rappeler la forme des éléments de $\mathbb{U}$ puis montrer que $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.

Commentaire : L'égalité $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ a suscité beaucoup de problèmes. Le plus simple est de procéder par double inclusion.

Les éléments de $\mathbb{U}$ sont de la forme $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. On procède par double inclusion.
$*$ Soit $z \in f(\mathbb{U})$: il existe $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ tel que $z = f(e^{i\theta})$ c'est-à-dire $z = e^{i2\theta}$ d'après la formule de De Moivre. Donc $z \in \mathbb{U}$. D'où $\boxed{f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}}$.
$*$ Soit $z \in \mathbb{U}$: on a donc $z = e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Donc $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta} \in \mathbb{U}$. D'où $\boxed{\mathbb{U} \subset f(\mathbb{U})}$.
Finalement $\boxed{f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}}$.

(b) Calculer $f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ et $f\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)$ avec l'argument principal. Déterminer $f(\mathbb{U}_3)$.

Commentaire : Sauf dans de rares copies, les calculs sont bien menés ici.

On a $\boxed{f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{4\pi}{3}}}$ et $\boxed{f\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{8\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}}$. Comme $f(1) = 1$ et que $\mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$, on en déduit $\boxed{f(\mathbb{U}_3) = \mathbb{U}_3}$.

(c) Montrer que $f(\mathbb{U}_n) \subset \mathbb{U}_n$.

Commentaire : La méthode pour montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre n'est pas toujours bien sue.

Soit $z \in f(\mathbb{U}_n)$: on peut écrire $z = f\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi $z = e^{i\frac{4k\pi}{n}}$ et $z^n = e^{i4k\pi} = 1$ donc $z \in \mathbb{U}_n$. On en déduit que $\boxed{f(\mathbb{U}_n) \subset \mathbb{U}_n}$.

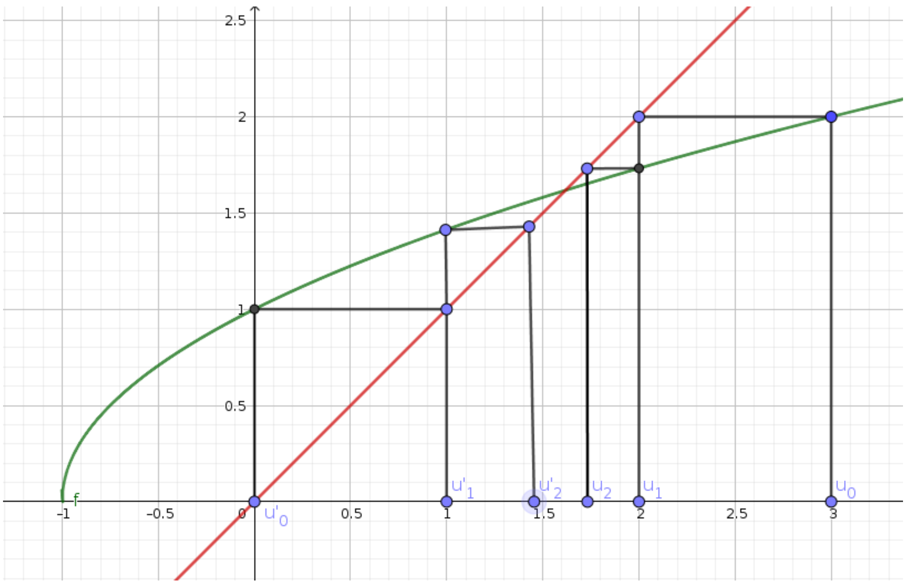
(d) A-t-on en général $f(\mathbb{U}_n) = U_n$?

Commentaire : Question traitée correctement dans une ou deux copies.

En général $\boxed{\text{on a pas } f(\mathbb{U}_n) \neq U_n}$. En effet, prenons $n = 2$. On a $f(\mathbb{U}_2) = \{1^2, (-1)^2\} = \{1\}$. On a bien $f(\mathbb{U}_2) \subset \mathbb{U}_2$ mais pas $\mathbb{U}_2 \subset f(\mathbb{U}_2)$.

Exercice 5.

1. Si $x \in$, $f(x)$ est définie si et seulement si $x+1 \geq 0$, i.e. $x \geq -1$. $\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est } [-1; +\infty[}$.
   On obtient le graphe de f par une translation horizontale de longueur -1 à partir du graphe de $x \mapsto \sqrt{x}$, qui est une demi-parabole (symétrique du graphe de sa réciproque, la fonction carré).



2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $f(x)$ est bien défini et $f(x) = \sqrt{1+x} \geq 0$. Donc $f(x) \in \mathbb{R}_+$. $\boxed{\text{L'ensemble } \mathbb{R}_+ \text{ est donc stable par } f.}$
   Puisque $u_0 = a \in \mathbb{R}_+$, la suite et bien définie et tous ses termes sont dans $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Termes u'_0, u'_1 et u'_2.
   (b) Termes u_0, u_1 et u_2.
4. On conjecture que f a un seul point fixe b, que si $a = b$ alors u est constante, si $a < b$ alors u est croissante que si $a > b$ alors u est décroissante. On conjecture que dans les trois cas u converge vers b.

5. Soit $x \in [-1; +\infty[$. Si $x \leq 0$, alors $f(x) \geq 0 \geq x$, et donc $f(x) - x \geq 0$. Si $x \geq 0$, alors
$$f(x) - x \geq 0 \iff f(x) \geq x \iff \sqrt{1+x} \geq x \iff 1 + x \geq x^2 \iff 0 \geq x^2 - x - 1$$
Or, ce trinôme est négatif entre ses deux racines, qui sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, qui est < 0. Ainsi, $f(x) - x \geq 0$ si et seulement si $x \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	-1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

<u>Commentaire</u> : Beaucoup n'arrivent pas à prendre du recul et à réaliser que x est point fixe ssi $g(x) = 0$ et donc que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est point fixe donc (ce qui sera très utile dans la question suivante) que $f\left(frac1+\sqrt{5}2\right) = frac1+\sqrt{5}2$

6. La fonction f est une composée de fonctions croissantes : elle est donc croissante. De plus, d'après (5), on sait que $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Soit $x \in [0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}]$. Puisque f est croissante et que $0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a $1 = f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. En particulier, $f(x) \in [0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}]$. Donc $\boxed{[0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}] \text{ est stable par } f}$.

   Soit $x \in [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$. Comme f est croissante et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x$, alors $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq f(x)$. Donc $f(x) \in [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$, et $\boxed{\text{l'intervalle } [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[\text{ est stable par } f}$.

7. Supposons d'abord que $a \in [0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}[$. D'après (6), cet intervalle est stable par f, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}]$. De plus, d'après le tableau de signes de (5), pour tout $x \in [0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}]$, $f(x) \geq x$, donc $\boxed{u \text{ est croissante}}$.

   Supposons maintenant que $a \in [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$. D'après (6), cet intervalle est stable par f, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$. De plus, d'après le tableau de signes de (5), pour tout $x \in [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$, $f(x) \leq x$, donc $\boxed{u \text{ est décroissante}}$.

8. On a trois cas.

   <u>Premier cas : $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$</u>. Alors la suite est constante, et converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   <u>Deuxième cas : $0 \leq a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$</u>. D'après (7), la suite est croissante. Or, d'après (6), tous les termes de la suite sont $\leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La suite u est donc croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Or, la fonction f est continue, donc u converge vers un point fixe de f. Mais d'après le tableau de signes de (5), le seul point fixe de f est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc u converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   <u>Troisième cas : $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$</u>. D'après (7), la suite est décroissante. Or, d'après (6), tous les termes de la suite sont $\geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La suite u est donc décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Or, la fonction f est continue, donc u converge vers un point fixe de f. Mais d'après le tableau de signes de (5), le seul point fixe de f est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc u converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Dans les trois cas, $\boxed{u \text{ converge vers } \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.