DS 5 corrigé

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $f(u_n) = \dfrac{(2\pi n)^2 \sin(2\pi n)}{(2\pi n)^2+1} = 0$. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc nulle et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 0}$.

   Par ailleurs, si $n \in \mathbb{N}$, $f(v_n) = \dfrac{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^2 \sin(2\pi n) + \frac{\pi}{2}}{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^2 + 1} = \dfrac{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^2}{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^2 + 1} = \dfrac{(2\pi n)^2}{(2\pi n)^2} \dfrac{(1+\frac{1}{4n})^2}{(1+\frac{1}{4n})^2 + \frac{1}{(2\pi n)^2}}$

   Par quotient, somme et produit de limites, on obtient que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = 1}$.

2. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais, d'après (1), $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(v_n)$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, $\boxed{f \text{ n'admet pas de limite en } +\infty.}$

3. Lorsque $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x\ln(x)\sin(x)}{x^2+1} \\ &\sim \frac{x\ln(x)\sin(x)}{x^2} \\ &\sim \frac{\ln(x)\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

   Or

$$\left|\frac{\ln(x)\sin(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{\ln(x)}{x}\right|$$

   Par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

   On a donc par théorème d'encadrement $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$

Exercice 2. *Matrices réelles et nombres complexes.*

I Premiers calculs

1. On a $\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J \text{ et } J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.}$

2. On a $M_z = \mathrm{Re}(z)I + \mathrm{Im}(z)J$, donc $\boxed{M_z \text{ est combinaison linéaire de } I \text{ et } J.}$

3. Écrivons $z = a + bi$ et $w = c + di$ sous forme algébrique. Alors

$$M_z + M_w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+d \end{pmatrix} = M_{(a+c)+(b+d)i} = M_{z+w}$$

   Donc $\boxed{M_z + M_w = M_{z+w}}$.

4. Écrivons $z = a + bi$ et $w = c + di$ sous forme algébrique. Alors $zw = (a+ib)(c+id) = ac - bd + (ad+bc)i$ et

$$M_z M_w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = M_{(ac-bd)+(ad+bc)i} = M_{zw}$$

   Donc $\boxed{M_z M_w = M_{zw}}$.

   De plus, comme $zw = wz$, on a $M_z M_w = M_{zw} = M_{wz} = M_w M_z$, donc $\boxed{M_z \text{ et } M_w \text{ commutent.}}$

5. D'après (4) et (1), on a $M_z M_{\frac{1}{z}} = M_1 = I = I_2$. Donc $\boxed{M_z \text{ est inversible et } M_z^{-1} = M_{\frac{1}{z}}.}$

II Application à la résolution de systèmes linéaires

6. Dans ce cas, le système devient $0 = c, 0 = d$. Si $(c, d) \neq (0, 0)$, le système est incompatible et son ensemble de solutions est $\boxed{\emptyset}$. Si au contraire $(c, d) = (0, 0)$, l'ensemble des solutions du système est $\boxed{\mathbb{R}^2}$.
7. Le système se réécrit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. En posant $z = a+bi$, on peut encore l'écrire $\boxed{M_z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}$
8. D'après (5), en posant $z = a + ib$, la matrice M_z est inversible. D'après la réécriture donnée en (7), le système $\boxed{(S) \text{ a une unique solution}}$. De plus, elle est donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_z^-1 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Or, d'après (5), $M_z^{-1} = M_{\frac{1}{z}}$. On a par ailleurs que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$, donc $M_z = \dfrac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

   L'unique solution du système est donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{ac-bd}{a^2+b^2} \\ \frac{ac+bd}{a^2+b^2} \end{pmatrix}}$

III Racines $n^{\text{èmes}}$ de ... l'identité

9. Soient $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi(z) = \varphi(w)$. On a alors $M_z = M_w$, et en particulier $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$. D'où $z = w$. $\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est donc injective}}$. D'après (5), si $M \in \mathrm{Im}(\varphi)$, alors M est combinaison linéaire de I et J. Or $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de I et J et n'est donc pas dans l'image de φ. L'application $\boxed{\varphi \text{ n'est donc pas surjective.}}$
10. On sait que $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est un ensemble avec n éléments distincts. D'après (4), si $\omega \in \mathbb{U}_n$, alors $(M_\omega)^n = M_{\omega^n} = M_1 = I_2$. Comme φ est injective (d'après (9)), les matrices M_ω pour $\omega \in \mathbb{U}_n$ sont toutes distinctes.
    $\boxed{\text{Il existe donc au moins } n \text{ matrices distinctes } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } A^n = I_2.}$
11. D'après (10), on sait que $M_1 = I_2$ et $M_{-1} = -I_2$ sont solutions de l'équation. Par ailleurs, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = I_2$$

   $\boxed{\text{L'équation } A^2 = I_2, \text{ d'inconnue } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ a donc au moins 4 solutions.}}$

Exercice 3. *Étude de certaines suites récurrentes.*

I Premiers résultats

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit u une suite constante qui prend la valeur $c \in$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $(a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n = (a+3)c - (3a+2)c + 2ac = c = u_{n+3}$. Donc u vérifie $(*)$, et $u \in E_a$.
   On a donc montré que $\boxed{\text{pour tout nombre réel } a, \text{ les suites constantes appartiennent à } E_a.}$
2. Soient $u, v \in E_a$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+3} + v_{n+3} &= (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n + (a+3)v_{n+2} - (3a+2)v_{n+1} + 2av_n \\ &= (a+3)(u_{n+2} + v_{n+2}) - (3a+2)(u_{n+1} + v_{n+1}) + 2a(u_n + v_n) \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{u + v \in E_a}$. De plus,

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+3} &= \lambda(a+3)u_{n+2} - \lambda(3a+2)u_{n+1} + 2\lambda a u_n \\ &= (a+3)\lambda u_{n+2} - (3a+2)\lambda u_{n+1} + 2a\lambda u_n \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\lambda u \in E_a}$.

II Le cas $a = 0$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n \geq 0$, alors $n+1$, $n+2$ et $n+3$ sont ≥ 1, d'où $e_{n+1} = e_{n+2} = e_{n+3} = 0$, donc $3e_{n+2} - 2e_{n+1} = 0 = e_{n+3}$. Donc $\boxed{e \in E_0}$
4. (a) On a $\forall n \geq 1$ $v_n = u_n$ et $v_0 = u_0 - \lambda$. Donc $v_2 = 3v_1 - 2v_0 \iff u_2 = 3u_1 - 2(u_0 - \lambda) \iff$ $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}(-u_2 + 3u_1 - 2u_0)}$ D'où l'existence d'un tel λ.

   Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, alors $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$ par choix de λ, et si $n \geq 1$ alors $v_{n+2} = u_{(n-1)+3} = 3u_{(n-1)+2} - 2u_{(n-1)+1} = 3v_{n+1} - 2v_n$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n}$.

   (b) Considérons le système suivant d'inconnues α, β, qu'on résout à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = v_0 \\ \alpha + 2\beta = v_1 \end{cases}$$

   on effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et on obtient

$$\begin{cases} \alpha + \beta = v_0 \\ \beta = v_1 - v_0 \end{cases}$$

   on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et on obtient

$$\begin{cases} \alpha = 2v_0 - v_1 \\ \beta = v_1 - v_0 \end{cases}$$

   En posant $\alpha = 2v_0 - v_1$ et $\beta = v_1 - v_0$, on a bien $\boxed{v_0 = \alpha + \beta \text{ et } v_1 = \alpha + 2\beta}$.

   (c) v est une suite récurrente d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 3r - 2 = 0$. Cette équation admet pour discriminant 1 et pour solutions 1 et 2. La suite v est donc

$$v_n = \alpha 1^n + \beta 2^n$$

   et nous avons déja déterminé α et β grace aux conditions initiales à la question précédente.

   (d) D'après (4a), pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = v_n + \lambda e_n$, et d'après (4c), pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = \alpha + \beta 2^n$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha + \beta 2^n + \lambda e_n$, i.e. $\boxed{u = \alpha(1)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(2^n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda e}$

5. D'après (1) et (3), on sait que $(1)_{n\in\mathbb{N}} \in E_0$ et $e \in E_0$. Comme, pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $3 \times 2^{n+2} - 2 \times 2^{n+1} = (3-1)2^{n+2} = 2^{n+3}$, on a également $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_0$. D'après (2), les combinaisons linéaires de suites de E_0 appartiennent aussi à E_0, donc $\boxed{\text{les combinaisons linéaires de } (1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } e \text{ appartiennent à } E_0.}$
6. D'après (4d), les suites de E_0 sont toutes combinaisons linéaires de e, $(1)_{n\in}$ et $(2^n)_{n\in}$. D'après (5), toutes les suites de cette forme sont bien dans E_0. Donc $\boxed{E_0 \text{ est l'ensemble des combinaisons linéaires de } e, (1)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (2^n)_{n\in\mathbb{N}}}$
7. On a utilisé un raisonnement par $\boxed{\text{analyse et synthèse.}}$

III Le cas $a = 3$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$AU_n = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

   Donc $\boxed{AU_n = U_{n+1}}$.

   (b) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A^n U_0 = U_n$

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $A^0 U_0 = U_0$

   Hérédité : Soit $n \in$ tel que $AU_n = U_{n+1}$. Alors, d'après (8a), $U_{n+2} = AU_{n+1} = AA^n U_n = A^{n+1} U_0$.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \text{ on a } U_n = A^n U_0.}$

(c) À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss sur la matrice augmentée $(P \mid I_3)$, on détermine que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ puis, en calculant le produit, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$
<u>Initialisation :</u>
On a $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, donc on a bien $A^0 = PD^0P^{-1}$
<u>Hérédité :</u>
Soit $n \in$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$. On a alors $PD^{n+1}P^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^n(P^{-1}AP)P^{-1} = (PD^nP^{-1})A(PP^{-1}) = A^nAI_3 = A^{n+1}$.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } A^n = PD^nP^{-1}.}$

(e) Écrivons $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}U_0$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors, d'après (8b) et (8d),

$$\begin{aligned} U_n &= A^nU_0 \\ &= PD^nP^{-1}U_0 \\ &= PD^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} x \\ 2^n y \\ 3^n z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2^n y \\ 3^n z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * \\ * \\ x + y \times 2^n + z \times 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, on a alors $\boxed{u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n}$.

(f) D'après le choix fait en (8e), $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}U_0 = P^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ donc x, y et z sont chacun une combinaison linéaire de u_0, u_1, u_2.

9. D'après (2), les combinaisons linéaires des suites de E_3 sont encore des suites de E_3. Il suffit donc de vérifier que $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E_3. D'après (1), on a la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}} \in E_3$. De

plus, si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} & 6 \times 2^{n+2} - 11 \times 2^{n+1} + 6 \times 2^n \\ & \quad = 2^n(24 - 22 + 6) \\ & \quad = 2^{n+3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & 6 \times 3^{n+2} - 11 \times 3^{n+1} + 6 \times 3^n \\ & \quad = 3^n(54 - 33 + 6) \\ & \quad = 3^{n+3} \end{aligned}$$

donc $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E_3.

Finalement, $\boxed{\text{toute combinaison linéaire des suites } (1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (3^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartient à } E_3.}$

10. D'après (8e), les suites de E_3 sont toutes combinaisons linéaires de $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n\in}$.
D'après (9), toutes les suites de cette forme sont bien dans E_3.
Donc $\boxed{E_3 \text{ est l'ensemble des combinaisons linéaires de } (1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (3^n)_{n\in\mathbb{N}}}$

11. D'après (8e), il existe $x, y, \in$ tels que pour tout $n \in$ on ait $u_n = x + 2^n y + 3^n z$. De plus, d'après(8f), x, y, z sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \dfrac{7}{2} - 4 \times 2^n + \dfrac{3}{2} \times 3^n}$.

12. D'après (11), on a $u_n = \frac{7}{2} - 4 \times 2^n + \frac{3}{2} \times 3^n = 3^n(\frac{7}{2\times 3^n} - 4(\frac{2}{3})^n + \frac{3}{2})$. Or, $\frac{7}{2\times 3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et comme $\frac{2}{3} < 1$, $(\frac{2}{3})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, $(\frac{7}{2\times 3^n} - 4(\frac{2}{3})^n + \frac{3}{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et, par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.