

DS 6 : Vendredi 28 février 2025

Exercice 1.

1. Cherchons P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a - b + c = 3 \\ c = 1 \\ a + b + c = -3 \end{cases},$$

ce qui équivaut à $c = 1$ et $\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = -4 \end{cases}$. En résolvant le système (par exemple à l'aide du pivot

de Gauss) on obtient comme unique solution $(a, b, c) = (-1, -3, 1)$. Le polynôme $P = -X^2 - 3X + 1$ convient donc.

2. On pouvait justifier en disant que la solution trouvée à la question 1 était unique ou bien raisonner comme suit :

Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ deux polynômes vérifiant les conditions de la question (1). Alors $\deg(P_1 - P_2) \leq 2$ et $(P_1 - P_2)(-1) = (P_1 - P_2)(0) = (P_1 - P_2)(1) = 0$. Le polynôme $P_1 - P_2$ est donc de degré ≤ 2 et admet au moins trois racines : c'est le polynôme nul. Donc $P_1 = P_2$, d'où l'unicité du polynôme trouvé à la question 1.

3. (a) On a $\deg(Q) = 3$

(b) On a $Q(-1) = -1, Q(0) = 2$ et $Q(1) = -1$.

(c) La fonction polynomiale associée à Q est continue. De plus, $Q(-1) < 0 < Q(0)$ et $Q(0) > 0 > Q(1)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $r_1 \in]-1; 0]$ et $r_2 \in [0; 1]$ tels que $Q(r_1) = 0$ et $Q(r_2) = 0$. Comme $-1, 0$ et 1 ne sont pas des racines de Q , r_1 et r_2 sont dans les intervalles ouverts correspondants.

Donc Q admet deux racines réelles r_1 et r_2 avec $r_1 \in]-1; 0[$ et $r_2 \in]0; 1[$.

(d) Comme Q admet deux racines différentes r_1 et r_2 , on sait que $(X - r_1)(X - r_2) \mid Q$. Il existe donc $B \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X - r_1)(X - r_2)B$. Or, $\deg(Q) = 3$, donc B est de degré 1 donc admet une racine réelle. Q est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Pour $x \in]n; n+1[$, on a $\lfloor x \rfloor = n$, donc, sur cet intervalle $f(x) = n^2 + (2n+1)(x-n) = (2n+1)x - n(n+1)$. Sur l'intervalle $]n; n+1[$, f est une somme et un produit de fonctions continues, donc

f est continue sur $]n; n+1[$.

2. Attention ! La fonction partie entière est discontinue en tout point entier !! Il fallait ici étudier la limite à droite et à gauche !!!

On sait que $\lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor = n$. Par somme et produit de limites,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = (n-1)^2 + (2(n-1)+1) \times 1 = (n-1+1)^2 = n^2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n^2 + (2n+1) \times 0 = n^2$$

Comme on a aussi $f(n) = n^2 + (2n+1) \times 0 = n^2$, il découle que $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = f(n)$, donc

f est continue en n . La fonction f est donc continue aux points entiers. Comme d'après (1) elle est aussi continue aux points qui ne sont pas des entiers, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Notons $n = \lfloor x \rfloor$ et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, de sorte que $x = n + \{x\}$ et $\{x\} \in]0; 1[$.

Remarque : L'entier $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x et le réel $\{x\}$ est appelée partie fractionnaire de x .

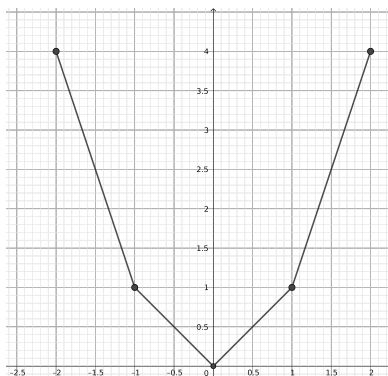
On a alors $f(x) = n^2 + (2n+1)\{x\}$.

Par ailleurs, $-x = -n - \{x\} = -(n+1) + (1 - \{x\})$. Comme $1 - \{x\} \in]0; 1[$, on a $\lfloor -x \rfloor = -n-1$ et

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-(n+1))^2 + (2(-(n+1))+1)(1-\{x\}) \\ &= (n+1)^2 - 2n - 1 + (2n+1)\{x\} \\ &= n^2 + (2n+1)\{x\} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est paire.

4. On a $f(0) = 0$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x - [x] \geq 0$, donc pour tout $x \geq 0$ on a $(2[x] + 1)(x - [x]) \geq 0$. D'où, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq [x]^2$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$, par le théorème de minoration on obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
5. D'après le calcul fait en (1), f est affine sur chaque intervalle de la forme $]n; n + 1[$ pour $n \in \mathbb{Z}$. De plus, elle est continue d'après (3) et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2$. On obtient le graphe suivant :



6. Soit $y \in [0; +\infty[$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) \geq y$. Alors $f(0) \leq y \leq f(x_0)$. Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in [0; x_0]$ tel que $f(x) = y$, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = y$ a des solutions dans $\mathbb{R}$.
7. Comme f est affine sur chaque intervalle de la forme $[n; n + 1]$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $f(n) = n^2$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. L'équation a donc exactement une solution dans $\mathbb{R}_+$. On constate alors que $f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$: il s'agit donc de la seule solution dans $\mathbb{R}_+$. Comme f est paire, il y a aussi exactement une solution dans $\mathbb{R}_-$, à savoir $-\frac{3}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{ \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$$

Exercice 3. Problème I : Polynômes de Tchebychev.

Partie I : Premières propriétés

1. On a $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons P_n l'assertion « T_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} ». Montrons, par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'assertion P_n est vraie.
- Initialisation : D'après (1), les assertions P_1 et P_2 sont vraies.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n et P_{n+1} soient vraies. Alors $\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n + 1$. D'où $\deg(2XT_{n+1}) = n + 2$, et donc $\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = n + 2$. De plus, puisque le seul terme de degré $n + 2$ de $2XT_{n+1} - T_n$ vient du produit de $2X$ et du terme dominant de T_{n+1} , le coefficient dominant de T_{n+2} est $2 \times 2^n = 2^{n+1}$.
- D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ T_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} .
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons P_n l'assertion « la fonction polynomiale associée à T_n est paire si n est pair et impaire si n est impair. ». Montrons, par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'assertion P_n est vraie.
- Initialisation : La fonction $x \mapsto 1$ est paire et la fonction $x \mapsto x$ est impaire, donc P_0 et P_1 sont vraies.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n et P_{n+1} soient vraies. On a deux cas :
- Premier cas : n est pair. Alors T_n est paire et T_{n+1} est impaire. Si $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-x) &= -2xT_{n+1}(-x) - T_n(-x) \\ &= 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \\ &= T_{n+2}(x) \end{aligned}$$

Donc T_{n+2} est paire.

- Deuxième cas : n est pair. Alors T_n est impaire et T_{n+1} est paire. Si $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-x) &= -2xT_{n+1}(-x) - T_n(-x) \\ &= -2xT_{n+1}(x) + T_n(x) \\ &= -T_{n+2}(x) \end{aligned}$$

Donc T_{n+2} est impaire.

D'après le principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction polynomiale associée à T_n est paire si n est pair et impaire si n est impair.

Beaucoup on confond la parité du degré avec la parité de la fonction polynomiale (attention, il n'y a pas que le terme de plus haut degré dans un polynôme!)

4. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $T_n(1) = 1$.

Initialisation : On a bien $T_0(1) = 1$ et $T_1(1) = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n(1) = T_{n+1}(1) = 1$. Alors $T_{n+2}(1) = 2 \times 1 \times T_{n+1}(1) - T_n(1) = 2 - 1 = 1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_n(1) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme T_n est paire si n est pair et impaire sinon, $T_n(-1) = T_n(1) = 1$ si n est pair et $T_n(-1) = -T_n(1) = -1$ sinon. Autrement dit, $T_n(-1) = (-1)^n$

Partie II : Suites récurrentes et valeurs de T_n

5. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \cos(\theta)$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= T_{n+2}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n \end{aligned}$$

. Donc $u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n$.

7. On a $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$.

8. Le polynôme caractéristique de la relation donnée en (6) est $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$, qui a pour racines $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ d'après (7). D'après le cours, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta}$. De plus, $\lambda + \mu = u_0 = 1$ et $\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta} = u_1 = \cos(\theta)$. Les valeurs $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ conviennent alors. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2}e^{in\theta} + \frac{1}{2}e^{-in\theta}.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après (8),

$$\begin{aligned} u_n &= T_n(\cos(\theta)) \\ &= \frac{1}{2}e^{in\theta} + \frac{1}{2}e^{-in\theta} \\ &= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ &= \cos(n\theta) \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

10. D'après (4), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T_n(\cos(0)) &= T_n(1) \\ &= 1 \\ &= \cos(n \times 0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_n(\cos(\pi)) &= T_n(-1) \\ &= (-1)^n \\ &= \cos(n\pi) \end{aligned}$$

. Donc la relation reste valable pour les valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Partie III : Racines et factorisation

11. Comme $\cos$ est continue, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\cos$ prend toutes les valeurs de $[-1; 1]$. Alors, pour tout $x \in [-1; 1]$, $P(x) = T_n(x)$: le polynôme $P - T_n$ admet alors une infinité de racines, et il est donc nul. Donc $\boxed{P = T_n}$.
12. D'après (9), pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0; \pi]$ et

$$\begin{aligned} T_n \left(\cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right) &= \cos \left(\frac{(2k+1)n\pi}{2n} \right) \\ &= \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

. De plus, comme $\cos$ est strictement décroissante sur $[0; \pi]$, ces nombres sont bien deux à deux distincts.

Les nombres $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ sont donc n racines distinctes de T_n .

13. D'après (2) T_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} . D'après (12), on sait aussi que T_n admet n racines réelles distinctes : $\boxed{\text{il est donc scindé à racines simples sur } \mathbb{R}}$. À l'aide de l'expression des racines de (12) et le coefficient dominant, on obtient :

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right)$$

14. D'après (13), $\prod_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ est le produit des racines de T_n et $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ est la somme des racines de T_n .

Le coefficient constant de T_n est $T_n(0) = T_n(\cos(\frac{\pi}{2})) = \cos(\frac{n\pi}{2})$, donc $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right)}$

De plus, comme T_n est pair si n est pair et impair si n est impair et que T_n est de degré n , le coefficient

de X^{n-1} dans T_n est nul, donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) = 0}$

Partie IV : Une décomposition en éléments simples

15. D'après le cours, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{T_n(x)}$ est de la forme $\boxed{\frac{1}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{x - \alpha_k}}$

avec $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$.

16. Comme T_n n'a que des racines simples et que α_i est une racine de T_n , $\boxed{T'_n(\alpha_i) \neq 0}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow \alpha_i} \frac{T_n(x)}{x - \alpha_i} = \lim_{x \rightarrow \alpha_i} \frac{T_n(x) - T_n(\alpha_i)}{x - \alpha_i} = T'_n(\alpha_i)$.

En prenant l'inverse, comme $T'_n(\alpha_i) \neq 0$ on a $\boxed{\lim_{x \rightarrow \alpha_i} \frac{x - \alpha_i}{T_n(x)} = \frac{1}{T'_n(\alpha_i)}}$.

17. D'après (9), on sait que $\forall \theta \in]0; \pi[, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. En dérivant cette égalité de fonctions composées (par rapport à θ), on obtient pour tout $\theta \in]0; \pi[: -\sin(\theta)T'_n(\cos(\theta)) = -n \sin(n\theta)$. Or, $\sin$ ne s'annule pas sur $]0; \pi[$ d'où $\boxed{\text{pour tout } \theta \in]0; \pi[, T'_n(\cos(\theta)) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)}}$.

18. D'après (15), on sait qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent des α_i on ait

$$\frac{1}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{x - \alpha_k}.$$

Fixons $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$ différent des α_i , on a $\frac{x - \alpha_i}{T_n(x)} = \lambda_i + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n-1} \frac{\lambda_k(x - \alpha_i)}{x - \alpha_k}$. En passant

à la limite quand $x \rightarrow \alpha_i$, on obtient grâce à (17) : $\frac{1}{T'_n(\alpha_i)} = \lambda_i$. Or, d'après (12), $\alpha_i = \cos(\frac{(2i+1)\pi}{2n})$,

donc, avec (18)

$$\lambda_i = \frac{1}{T'_n\left(\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)\right)} = \frac{\sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)}{n \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{2}\right)} = \frac{(-1)^i}{n} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$$

Finalement, on a la décomposition en éléments simples :

$$\boxed{\frac{1}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{(-1)^k}{n} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{x - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}}$$

Exercice 4. PROBLÈME II : APPROXIMATIONS DU NOMBRE D'OR

Partie I : Généralités

Pour répondre à la question, on peut soit calculer φ^2 et vérifier que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ soit trouver les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ et constater que φ en fait partie. Regardons la deuxième proposition. Le discriminant de l'équation vaut

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5.$$

Ainsi l'équation admet deux solutions réelles qui sont $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a bien $x_1 = \varphi$.

Partie II : Approximation du nombre d'or par la suite de Fibonacci

1. (a) On utilise les deux termes F_0 et F_1 qui sont donnés pour calculer les autres. On a $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$ et $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$.
- (b) Version itérative :

```
def fib(n):
    u = 0
    v = 1
    for i in range(2, n+1):
        w = v          # sauvegarde
        v = v + u
        u = w
    return v
```

- (c) Version récursive :

```
def fib_rec(n):
    if n == 0:
        return 0
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

2. (a) Pour utiliser le résultat indiqué il faut d'abord calculer les solutions de $r^2 = r + 1$ ou encore $r^2 - r - 1 = 0$. On a vu dans la Partie I. que cette équation a deux solutions $r_1 = \varphi$ le nombre d'or et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi pour tout $n \geq 0$ on a :

$$F_n = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Il reste à déterminer a et b . Pour cela on sait que :

$$\begin{aligned} \begin{cases} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 0 \\ a \frac{1+\sqrt{5}}{2} + b \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -b \\ -b \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -b \\ -b(\sqrt{5}) &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ b &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

(b)

Remarquons que $\sqrt{5} > 1$ donc $1 + \sqrt{5} > 2$ et donc $\varphi > 1$. On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_1^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^n = +\infty.$$

Et comme $\frac{1}{\sqrt{5}} > 0$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n = +\infty.$$

De plus $\sqrt{5} < 3$ donc $-2 < 1 - \sqrt{5} < 0$. On a donc $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ ce qui implique $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$. On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 0.$$

Et enfin :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 0.$$

Puisque la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la somme d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite qui diverge vers $+\infty$, on peut conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty.$$

(c) Soit $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} \\ &\sim \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n} \\ &\sim \varphi \end{aligned}$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_2^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^n = +\infty$. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Partie III : Approximation du nombre d'or par méthode de Newton

- Supposons que f' ne soit pas de signe constant sur I : il existe x_0 et x_1 appartenant à I tels que $f'(x_0)f'(x_1) < 0$. On sait que la fonction f' est continue sur I . On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe un réel α entre x_0 et x_1 (donc appartenant à I) telle que $f'(\alpha) = 0$. Cela contredit l'hypothèse que f' ne s'annule pas sur I . On en déduit que f' est soit strictement positif sur I soit strictement négatif sur I .

Beaucoup trop d'arnque ou d'imprécision ici

- Un conséquence immédiate est que f est ou bien strictement croissante (si $f' > 0$) ou bien strictement décroissante sur I (si $f' < 0$). En conclusion f est strictement monotone sur I .
- (a) On sait que f est dérivable sur I donc la courbe C_f admet des tangentes sur tout l'intervalle I . Pour $x_0 \in I$, l'équation de la tangente $T_f(x_0)$ à C_f au point d'abscisse x_0 est

$$T_f(x_0) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

- (b) Toutes les droites du plan coupent l'axe des abscisses sauf celles qui sont parallèles ou confondues avec l'axe des abscisses. Une droite parallèle ou confondue à l'axe des abscisses a pour équation $y = c$ où c est une constante. Autrement dit une telle droite a un coefficient directeur nul. Or le coefficient directeur d'une tangente $T_f(x_0)$ est égal à $f'(x_0)$ et par hypothèse $f' \neq 0$ sur I . Les tangentes à C_f ont donc un coefficient directeur non nul et ces dernières ne sont ni parallèles ni confondues avec l'axe des abscisses, c'est-à-dire que chacune coupe l'axe des abscisses en un unique point.
- Puisque la fonction f est dérivable sur I , elle est en particulier continue sur I . De plus $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires on sait qu'il existe α entre a et b (en particulier $\alpha \in I$) tel que $f(\alpha) = 0$. Or f est strictement monotone sur I : α est l'unique nombre qui vérifie $f(\alpha) = 0$.
- (a) D'après la question 1.b. la tangente $T_f(x_0)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point dont on note l'abscisse x_1 . En remplaçant dans l'équation de la tangente (2.a.), cela signifie que x_1 vérifie :

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0).$$

Il ne reste plus qu'à isoler x_1 et cela est possible car $f'(x_0) \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 &\Leftrightarrow f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0) \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

- (b) Le même raisonnement pour trouver x_2 (l'abscisse du point d'intersection entre $T_f(x_1)$ et l'axe des abscisses) implique que x_2 vérifie

$$0 = f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

c'est-à-dire comme ci-dessus :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

On construit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

- (a) On sait que f est strictement monotone donc il faut envisager les deux cas.
Si f est strictement croissante sur I alors $f' > 0$ et en particulier $f'(x_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus comme $x_n > \alpha$, on a $f(x_n) > f(\alpha) = 0$. En utilisant la relation de 3.b. on a donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0.$$

Et on en déduit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Si f est strictement décroissante sur I alors $f' < 0$ et en particulier $f'(x_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus comme $x_n > \alpha$, on a $f(x_n) < f(\alpha) = 0$. En utilisant la relation de 3.b. on a donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0.$$

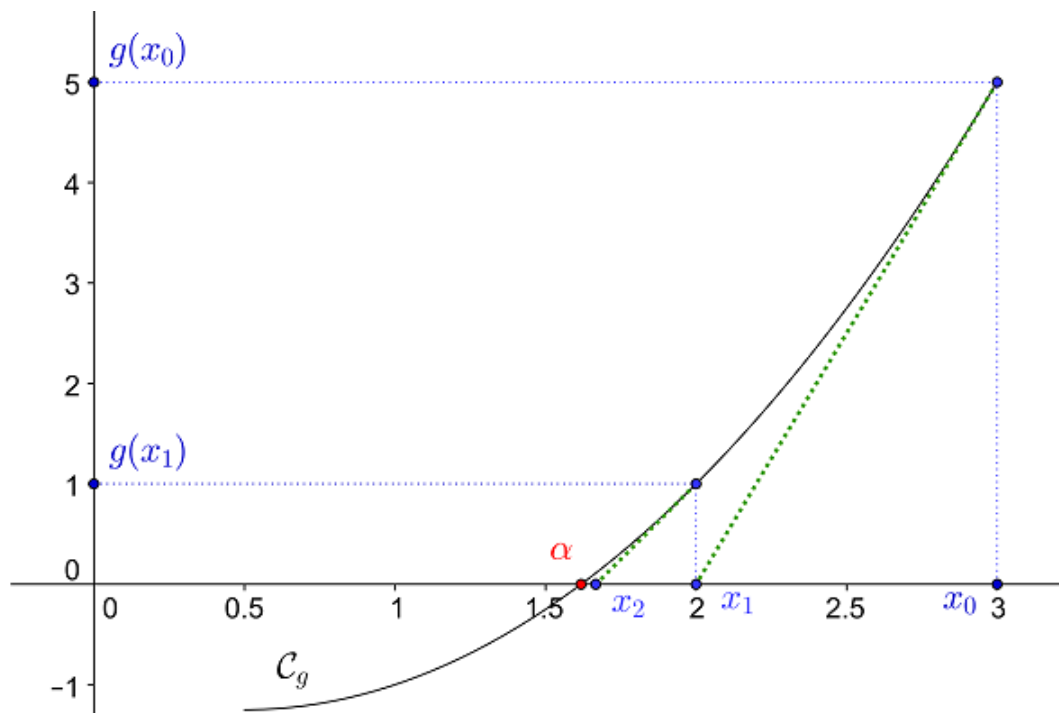
Et on en déduit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- (b) Par hypothèse la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par α . De plus on vient de montrer en *a.* que la suite est décroissante. On en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et converge vers une limite $l \in I$.
- (c) On vient de voir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Et on sait que f et f' sont continues sur I donc on en déduit que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f'(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $f(l)$ et $f'(l)$. En passant à la limite dans la relation de 3.b. on obtient :

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)}$$

et cela force $f(l) = 0$. Mais on a vu (question 3.) que α est l'unique réel de I qui vérifie $f(\alpha) = 0$. On en déduit donc que $l = \alpha$. Finalement on a que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

7. (a) On obtient le graphique suivant :



- (b) On a $x_0 = 3$ et grâce à la relation $x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - x_{n-1} - 1}{2x_{n-1} - 1}$ on trouve :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= \frac{5}{3} \approx 1,6667 \\ x_3 &= \frac{34}{21} \approx 1,6190 \\ x_4 &= \frac{1597}{987} \approx 1,6180 \end{aligned}$$

Or on sait que le nombre d'or vaut

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180.$$