Mathématiques DS : février 2020

Les calculatrices sont **autorisées**.
Durée : 4h.
Rédaction et soin : 4 points.

Exercice 1. *10 points.*

1. Soit u une suite arithmétique de raison 3 de premier terme -10. Exprimer u_n en fonction de n puis exprimer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.
2. Soit u une suite géométrique de raison 3 de premier terme -10. Exprimer u_n en fonction de n puis exprimer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.
3. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 6$. Trouver l'expression de u_n en fonction de n puis exprimer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.
4. Soit u la suite définie par $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Trouver l'expression de u_n en fonction de n puis exprimer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.
5. Soit v la suite par $v_0 = 5$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{1}{2}v_n^2}$$
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n^2 - 16$.
Montrer que $(w_n)_n$ est une suite géométrique et exprimer w_n puis v_n en fonction de n.

Exercice 2. *10 points, Adapté du sujet CCP-TSI 2013.*
Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{12} - x + 1$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Déterminer les variations de f.
2. (a) Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
   On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$ avec $\beta < \gamma$
   (b) Simplifier l'expression $1 + \frac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).
   (c) A l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $]1; 1,2[$ et que γ appartient à $]2,7; 2,8[$.
   (d) Dresser le tableau de signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, +\infty[$.
4. On cherche à obtenir une approximation de β. A cet effet on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{12} \end{cases}$$
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0, \beta]$.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$
   Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.
   (d) Ecrire un algorithme en langage python qui permette d'obtenir pour un entier naturel N donné la valeur de u_N.

Exercice 3. *10 points* 1. Déterminer, en justifiant, un équivalent de suites suivantes

(a)
$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(b)
$$\exp\left(\frac{1}{n^3}\right)-1$$

(c)
$$\frac{n^3+3^n+7n}{e^n+4^n+6n^9}$$

(d)
$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

(e)
$$\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1$$

(f)
$$\frac{2n^3-\ln(n)+1}{n^2+1}$$

(g)
$$\frac{n!+e^n}{2^n+3^n}$$

2. Donner la limite des suites suivantes.

(a)
$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

(b)
$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Exercice 4. *10 points.*
Soit
$$A=\begin{pmatrix}16 & 4 & -4\\ -18 & -4 & 5\\ 30 & 8 & -7\end{pmatrix}$$

1. <u>Etude de la matrice A</u>
   (a) Résoudre le système $AX=0$.
   (b) Soit $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (c) Soit $D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1}AP=D$.
2. <u>Résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2=A$</u>
   (a) Soit Δ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ montrer que :
   $$\Delta D=D\Delta \Longleftrightarrow \Delta \text{ est une matrice diagonale}$$
   (b) Soit $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2=A$. On pose $Y=P^{-1}XP$.

i. Vérifier que $Y^2 = D$ et montrer que : $YD = DY$.

ii. En déduire que $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$ où $a \in \{1, -1\}$ et $b \in \{1, -1\}$

(c) Réciproquement, montrer que si $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$ où $a \in \{1, -1\}$ et $b \in \{1, -1\}$ alors $X = PYP^{-1}$ est solution de l'équation $X^2 = A$. En déduire le nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$.

3. Calcul de A^n et application à une étude de suites

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer D^n et en déduire A^n.

(b) Soient a, b, c trois réels.
On considère les suites (p_n) , (q_n) , (r_n) définies par : $p_0 = a$, $q_0 = b$, $r_0 = c$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} p_{n+1} = 16p_n + 4q_n - 4r_n \\ q_{n+1} = -18p_n - 4q_n + 5r_n \\ r_{n+1} = 30p_n + 8q_n - 7r_n \end{cases}$$

i. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Exprimer U_n à l'aide de A et U_0.
En déduire les expressions de p_n , q_n , r_n en fonction de a, b, c et n.

ii. Déterminer une condition nécéssaire et suffisante sur a, b, c pour que les suites (p_n) , (q_n) , (r_n) tendent vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
Cette condition étant remplie, que peut-on dire des suites (p_n) , (q_n) , (r_n) ?