pifont

DS 8

Exercice 1.
Adapté de CCINP 2022.
Le but de cet exercice est l'étude de l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ avec n entier fixé non nul par :

$$\phi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$$

1. Pour tout a, $b \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

2. Soit k entier non nul. On applique la formule du binôme de Newton avec $a = X$, $b = 1$ et $n = k$ et on obtient :

$$(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$$

3. On considère les polynômes $P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2, P_3(X) = X^3$.
On a

$$\begin{array}{rcl} \phi(P_0)(X) & = & P0(X+1) - P0(X) \\ & = & 1-1 \\ & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \phi(P_1)(X) & = & P1(X+1) - P1(X) \\ & = & (X+1) - X \\ & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \phi(P_2)(X) & = & P2(X+1) - P2(X) \\ & = & (X+1)^2 - X^2 \\ & = & X^2 + 2X + 1 - X^2 \\ & = & 2X+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \phi(P_3)(X) & = & P3(X+1) - P3(X) \\ & = & (X+1)^3 - X^3 \\ & = & X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 \\ & = & 3X^2 + 3X + 1 \end{array}$$

4. On a

$$\begin{array}{rcl} \phi^2(P_2)(X) & = & \phi(\phi(P_2(X))) \\ & = & \phi(2X+1) \\ & = & 2(X+1) + 1 - (2X+1) \\ & = & 2X + 2 + 1 - 2X - 1 \\ & = & 2 \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \phi^3(P_2)(X) & = & \phi(\phi^2(P_2(X))) \\ & = & \phi(2) \\ & = & 0 \end{array}$$

5. Montrons déjà que ϕ est linéaire.
Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
On a

$$\begin{array}{rcl}\phi(\lambda P+Q)(X) & = & (\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X) \\ & = & \lambda P(X+1)+Q(X+1)-\lambda P(X)-Q(X) \\ & = & \lambda(P(X+1)-P(X))+Q(X+1)-Q(X) \\ & = & \lambda\phi(P)(X)+\phi(Q)(X)\end{array}$$

Soit $\phi \in \mathbb{R}_n[X]$ On sait que $\deg(\phi(P)) = \deg(P(X+1)-P(X)) \leq \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X)))$. or, $P(X+1)$ est la composée d'un polynome de degré 1 et d'un polynôme de degré n donc est de degré $n \times 1$. donc $\deg(\phi(P)) \leq n$.
ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

6. Soit P est un polynôme de degré $k > 0$, $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, alors le terme de degré k dans $\phi(P)$ est le terme de degré k dans l'expression :

$$a_k(X+1)^k - a_k X^k$$

puisque tous les autres termes sont de degré inférieur. En développant grace à la question 2), on obtient

$$a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - a_k X^k$$

et on voit que le terme de degré k est $a_k X^k - a_k X^k$ donc vaut 0.

7. Soit P est un polynôme de degré $k > 0$, $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$.

$$\begin{array}{rcl}\phi(P) & = & P(X+1)-P(X) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j(X+1)^j - \sum_{j=0}^{k} a_j X^j\end{array}$$

Les termes de degré $k-1$ proviennent donc du développement de :

$$a_k(X+1)^k + a_{k-1}(X+1)^{k-1} - a_k X^k - a_{k-1}X^{k-1}$$

puisque tout le reste est de degré $\leq k-2$. On développe et cela donne :

$$a_k X^k + a_k k X^{k-1} + a_{k-1}X^{k-1} - a_k X^k - a_{k-1}X^{k-1}$$

il reste en degré $k-1$:

$$k a_k$$

8. Si P est un polynôme de degré $k > 0$, $k \neq 0$ et $a_k \neq 0$ puisque P est de degré exactement k donc $\phi(P)$ est un polynôme de degré $k-1$.

9. Si P est un polynôme de degré $k > 0$ alors $\phi(P)$ est un polynôme de degré $k-1$ donc non nul.
Si P est un polynôme constant alors $\phi(P) = 0$. On a donc $\ker(\phi) = \mathbb{R}_0[X]$

10. Si est une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E dans un espace vectoriel F alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{Rg}(f)$$

11. En appliquand le théorème du rang à ϕ, on obtient :

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\ker(\phi)) + \mathrm{Rg}(\phi)$$

ce qui donne

$$n+1 = 1 + \mathrm{Rg}(\phi)$$

on a donc $\mathrm{Rg}(\phi) = n$ Or on sait que $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a un sous-espaces vectoriel inclus dans un autre et les deux dimensions sont égales donc ils sont égaux :

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

12. On a $\phi(Q) = P$ c'est à dire : $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$.
On a donc pour tout i entre 0 et n :
$$Q(i+1) - Q(i) = P(i)$$
en somme entre 0 et n
$$\sum_{i=0}^{n} Q(i+1) - Q(i) = \sum_{i=0}^{n} P(i)$$
La somme de gauche est une somme téléscopique.
$$Q(n+1) - Q(0) = \sum_{i=0}^{n} P(i)$$

13. En notant $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée et Φ_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \Phi_A(M) = AM.$$

1. Presque tout le monde à bien pensé aux deux points. C'est bien!
Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) \\ &= \lambda AM + \mu AN \\ &= \lambda \Phi_A(M) + \mu \Phi_A(N). \end{aligned}$$
Ainsi Φ_A est linéaire. De plus si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi_A(M) = AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (stabilité par produit) donc $\boxed{\Phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2. Dans cette question seulement on prend $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bien traitée sauf quelques erreur de calcul.

On a $2 \times 2 - 1 \times 1 = 3 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse est $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

(b) red Peu d'élèves ont pensé à utiliser la question précédente. .

On pose $\Psi : M \longmapsto A^{-1}M$ avec A^{-1} définie dans la question précédente. On a bien :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Psi \circ \Phi_A(M) = \Psi(AM) = A^{-1}(AM) = M$$
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A \circ \Psi(M) = \Phi_A\left(A^{-1}M\right) = A(A^{-1}M) = M$$
donc $\boxed{\Psi \text{ convient}}$.

(c) Encore une fois, il faut penser à faire le lien avec la question précédente.

La question précédente nous permet d'affirmer que Φ_A est bijective. Ainsi directement $\boxed{\ker(\Phi_A) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}}$ et $\boxed{\mathrm{Im}(\Phi_A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

3. Dans cette question seulement on prend $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Question assez bien traitée.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} M \in \ker(\Phi_A) & \Longleftrightarrow & AM = 0_{2,2} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} a = -c \\ b = -d \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & M = \begin{pmatrix} -c & -d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi $\ker(\Phi_A) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Les deux matrices $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires donc forment une famille libre et donc $\boxed{\text{une base du noyau de } \Phi_A}$.

(b) Comme $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ forment la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(\Phi_A) & = & \{\Phi_A(E_{1,1}), \Phi_A(E_{1,2}), \Phi_A(E_{2,1}), \Phi_A(E_{2,2})\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{array}$$

Et comme le rang de Φ_A est 2 grâce au théorème du rang, les bases de l'image de Φ_A contiennent deux vecteurs donc $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est une base de l'image}}$.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle la **trace de** A et on note $Tr(A)$ la somme des coefficients diagonaux. Ainsi $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. On note Tr l'application :

$$Tr : \begin{array}{rcl} {}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & Tr(A) \end{array}$$

On rappelle que la somme $A + B$ de deux matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est définie par $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. En général bien faite sauf quelques arnaques et des élèves qui ne pensent pas à préciser que l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$! .
   Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ alors
   $$\lambda A + \mu B = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})$$
   donc :
   $$\begin{array}{rcll} Tr(\lambda A + \mu B) & = & \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) & \\ & = & \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} & \text{linéarité de la somme} \\ & = & \lambda Tr(A) + \mu Tr(B) & \end{array}$$

On en déduit que $\boxed{Tr \text{ est linéaire}}$. Puisque Tr est à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est bien une forme linéaire.

2. La matrice I_n a ses coefficients diagonaux égaux à 1. La diagonale possède n termes donc $\boxed{Tr(I_n) = n}$.
3. Question souvent ratée alors qu'elle était abordable! .
On a $\mathrm{Im}(Tr)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Or $\mathrm{Im}(Tr)$ contient n d'après la question précédente donc $\mathrm{Im}(Tr) \neq \{0\}$ donc $\dim(\mathrm{Im}(Tr)) \geq 1$. Mais comme $\dim(\mathbb{R}) = 1$ on en déduit que $\boxed{\mathrm{Im}(Tr) = \mathbb{R}}$.
4. Ne pas oublier que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, on applique le théorème du rang qui donne : $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\ker(Tr)) + \dim(\mathrm{Im}(Tr))$ c'est-à-dire $\boxed{\dim(\ker(Tr)) = n^2 - 1}$ d'après la question précédente.
5. On pose $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2;\ M = AB - BA\}$. On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.
   (a) Question qui avait été vue en cours mais qui n'a pas toujours été bien réussie! Toujours revoir les exercices classiques vus en DM et en classe Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ alors $AB = (c_{i,j})$ et $BA = (d_{i,j})$ avec :
$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \qquad \text{et} \qquad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}.$$
   Puis on calcule la trace :
$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$$
   et
$$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i}.$$
   Les nombres réels $b_{i,k}$ et $a_{k,i}$ commutent donc la deuxième somme se réécrit :
$$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{i,k}$$
   puis les indices étant muets, on tombe sur la même somme que $Tr(AB)$. Ainsi $\boxed{Tr(AB) = Tr(BA)}$.
   (b) red Il n'y a pas besoin de montrer la double inclusion (d'ailleurs $\ker(Tr) \subset F$ est très difficile à montrer) : il fallait montrer $F \subset \ker(Tr)$ et justifier l'égalité grâce à cette inclusion et l'égalité des dimensions. .
   Soit $M \in F$. Il existe $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $M = AB - BA$. On a en utilisant successivement la linéarité de Tr puis la propriété précédente :
$$Tr(M) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0.$$
   Donc $M \in \ker(Tr)$. D'où $F \subset \ker(Tr)$.
   De plus $\dim(F) = n^2 - 1 = \dim(\ker(Tr))$ donc $\boxed{\ker(Tr) = F}$.

Exercice 41
D'après le cours :
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$
$$x = x + o(x^5)$$
$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$
Après calcul :
$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^5$$

Toutes ces fonctions sont impaires et n'ont que des termes de degré impaire dans leur $DL_5(0)$. Elles ont le même terme de degré 1. Puisque, pour tout $x > 0$, $-\frac{x^3}{3} \leq -\frac{x^3}{6} \leq 0 \leq \frac{x^3}{6} \leq \frac{x^2}{3}$, on peut déjà en déduire que pour $x \geq 0$ au voisinage de 0 :

$$\arctan(x) \leq \sin(x) \leq x \leq \operatorname{sh}(x)$$

et

$$\arcsin(x) \leq \tan(x)$$

Pour montrer que $\operatorname{sh}(x) \leq \arcsin(x)$, il faut comparer les terme d'ordre 5 : on a pour tout $x \geq 0$, $\frac{x^5}{120} \leq \frac{3x^5}{40}$ donc $\operatorname{sh}(x) \leq \arcsin(x)$.

On a donc l'inégalité pour x positif dans un voisinage de 0. L'inégalité est inversée pour $x \leq 0$ mais aucun n'élève ne l'a souligné.
Si vous croyez qu'il y a une erreur dans l'énoncé, écrivez-le sur votre copie !

Exercice 5Partie A. Brève étude de th

1. Déterminer l'ensemble de définition de th.
   Même si cette question a été en général bien traitée, il y a la plupart du temps manqué la justification ! En particulier, il faut voir écrit que le dénominateur ne s'annule pas. Ce n'est pas parce que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ que $\frac{f}{g}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   La fonction ch est la somme de deux exponentielles et ne s'annule donc jamais sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\text{th est définie sur } \mathbb{R}}$.
2. On sait que la fonction sh est impaire et que ch est paire : leur quotient $\boxed{\text{th est donc une fonction impaire}}$.
   Sinon à la main : soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{aligned} \operatorname{th}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} \\ &= -\operatorname{th}(x). \end{aligned}$$
3. Beaucoup ont essayé de montrer l'inégalité "à la main" alors que ce genre d'inégalité se montre toujours de la même façon : soit par une étude de fonction toute bête, soit par le théorème des accroissements finis.
   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \operatorname{th}(x) - x$. On a f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (th l'est comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on montre facilement que :
   $$f'(x) = -\operatorname{th}^2(x)$$
   Et on a $-\operatorname{th}^2(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $f(0) = 0$ on en déduit que $f(x) < 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ c'est-à-dire $\boxed{\operatorname{th}(x) < x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*}$.
4. Enoncer un résultat analogue pour $x \in \mathbb{R}_-^*$.
   On peut utiliser l'imparité de la fonction th ou étudier la fonction f précédente sur $]-\infty, 0[$. Puisque la fonction th est impaire d'après la question 2. on en déduit que $\boxed{\operatorname{th}(x) > x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_-^*}$.
5. Equivalent en 0.
   (a) On sait que :
   $$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
   et :
   $$e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
   On en déduit que $\boxed{\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)}$ et $\boxed{\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$.

   (b) En déduire que $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et déterminer un équivalent simple de ch en 0.
   Trop peu se souviennent que l'équivalent en 0 est le premier terme non nul du DL. Ce qui rend la question triviale une fois que les DL ont été trouvé.
   Si une fonction admet un développement limité en 0 alors la fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son développement limité. On déduit de la question 5.(a) que :

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x} \text{ et } \boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1}.$$

(c) En déduire un équivalent de th en 0.
Il manquait la plupart du temps le mot "par quotient" d'équivalent pour justifier la réponse. Par quotient d'équivalent, on déduit de la question 5.(b) que $\boxed{\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$.

Partie B. Etude d'une fonction

1. (a) Encore une fois, une brève justification s'impose.
   La fonction f est définie sur $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$.
2. Etudier la parité de f.

   Le domaine D_f est centré en 0 et pour $x \in D_f$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x\,\mathrm{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

   On en déduit que $\boxed{f \text{ est paire sur } D_f}$.
3. Déterminer la limite de f en 0.
   Beaucoup ont voulu utilisé le résultat $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ démontré en partie A. Sauf que cela n'est vrai qu'en 0 ! Et que si $x \to 0$ alors $\frac{1}{x} \to \infty$. Ici il fallait déterminer la limite à la main, et passer par les croissances comparées ! .
   On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et par composée $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Par croissance comparée, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
   De plus on a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et par composée $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$. Par croissance comparée, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.
   Les limites à gauche et à droite sont les mêmes : on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$.

1. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   D'après la question $A.5.(b)$ on a $\mathrm{sh}(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$. Donc $\frac{\mathrm{sh}(X)}{X} \underset{X\to 0}{\sim} 1$. En posant $X = \frac{1}{x}$, on peut écrire $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X}$ et donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1}$. De même $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 1}$. Cela n'est pas surprenant car f est paire ...
2. Si f admet un équivalent en $+\infty$ alors la limite de l'équivalent est la limite de f. Ainsi grâce à la question 2.(a) on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$ et de même $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$.

La fonction f est dérivable sur D_f comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. En effet $x \longmapsto \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur D_f (comme composée de fonctions dérivables). On rappelle (et cela est immédiat) que la dérivée de sh est ch. Pour $x \in D_f$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{en factorisant par ch}(1/x) \end{aligned}$$

On a déjà vu que pour tout $x \in D_f$ on a $\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. D'après la question 3, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$. On en déduit le tableau de variations de f grâce aux questions $A.3.$ et $A.4.$, et les limites obtenues en 2.(b) : On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	1

Trois mots importants : intervalle, stricte monotonie et continuité. Il fallait préciser l'ensemble d'arrivée, ce qui n'a pas toujours été le cas. Attention : se rappeler que la fonction réciproque a le même sens de variations que la fonction de départ ! La fonction $f_{|]0,+\infty[}$ est strictement décroissante et continue sur $]0,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $f_{|]0,+\infty[}$ est bijective vers $]1,+\infty[$. La réciproque h a le même sens de variations que $f_{|]0,+\infty[}$: elle est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

x	1		$+\infty$
h	$\|\; +\infty$	$\searrow$	0

1. On peut remarquer que la fonction sh est impaire donc son développement limité ne comporte que des puissances impaires.
   On a $\mathrm{sh}(X) \underset{X\to 0}{=} X + \frac{X^3}{3!} + o(X^3)$ donc
   $$\frac{\mathrm{sh}(X)}{X} \underset{X\to 0}{=} 1 + \frac{X^2}{6} + o(X^2)$$
   Mais la fonction $X \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(X)}{X}$ est paire donc ne comprend que des termes de puissances paires et le terme de degré 3 est nul. D'où $\boxed{\frac{\mathrm{sh}(X)}{X} \underset{X\to 0}{=} 1 + \frac{X^2}{6} + o(X^3)}$.
2. A revoir pour tout le monde !.
   En posant $X = \frac{1}{x}$. On a bien $X \longrightarrow 0$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. On en déduit d'après la question 6.(a) le développement :
   $$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).}$$
   Et de même :
   $$\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).}$$
3. A revoir pour tout le monde !.
   Pour rappel : une asymptote est une droite, donc d'équation $y = ax + b$!.

   La question 6.(b) nous indique que f admet pour $\boxed{\text{asymptote la droite d'équation } y = 1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Puisque $\frac{1}{6x^2} > 0$ pour tout réel x non nul,
   $\boxed{\text{la courbe } C_f \text{ se situe au-dessus de son asymptote aux voisinages de } +\infty \text{ et de } -\infty}$.

La fonction $x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. De plus pour $x \neq 0$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$. Considérons la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On a déjà que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. D'après la question 6.(a), la fonction F admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, et la limite de F en 0 est la limite de son développement limité, à savoir 1. Ainsi F est continue sur $\mathbb{R}$. De plus F admet aussi un développement limité à l'ordre 1. Mais comme F est définie en 0, cela équivaut au fait que F est dérivable en 0. Finalement $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.