DS 1 : le 13 septembre 2024

- ❀ Les calculatrices sont interdites
- ❀ Le soin, la rigueur et la rédaction constituent une part importante du barème.
- ❀ Introduire toutes les variables utilisées.
- ❀ Conclure chaque question en encadrant ou soulignant vos résultats.

Exercice 1. *Une inégalité.*
Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad 2x < \sin(x) + \tan(x).$$

On considère la fonction $f : x \longmapsto \sin(x) + \tan(x) - 2x$.
On admet que la fonction tan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et les fonctions sin et $x \mapsto 2x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

Commentaire : Beaucoup trop de copies oublient de justifer leur réponse. Pensez à tout justifier !

2. Signe de la dérivée.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 - 2x^2 + 1 > 0$. On pourra démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2 - x - 1) &= x^3 - x^2 - x - x^2 + x + 1 \\ &= x^3 - 2x^2 + 1\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)}$$

En calculant le discriminant de $x^2 - x - 1$, on trouve que ce polynôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il en découle la factorisation suivante : $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x-x_1)(x-x_2)$.
Le signe en découle à l'aide d'un tableau de signes (à faire) et on trouve :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$$

Commentaire : Pour étudier le signe d'une expression, on essaie de la factoriser au maximum (l'énoncé vous guidait dans ce sens) puis on effectue un tableau de signes pour prendre en compte le signe de chaque terme du produit et pouvoir conclure quant au signe de notre expression de départ.

   (b) Justifier que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$f'(x) = \frac{X^3 - 2X^2 + 1}{X^2}$$

où X est à déterminer en fonction de x.

La fonction f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Soit $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)+\frac{1}{\cos^2(x)}-2 \\ &= \frac{cos^3(x)+1-2\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[, f'(x)=\frac{X^3-2X^2+1}{X^2} \text{ où } X=\cos(x)}$$

<u>Commentaire</u> : Bien justifier la dérivablité (même rapidement) et dire pour quelles valeurs de x on calcule la dérivée.

(c) En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Puisque $\cos^2(x)>0$ pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f'(x)>0 \iff \cos^3(x)-2\cos^2(x)+1>0$. Comme $\cos(x)\in]0,1[$ pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a en particulier $\cos(x)\in\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2},1\right[$. Cela implique, d'après 2.(a), que $\boxed{f'(x)>0 \text{ pour tout } x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}$.

<u>Commentaire</u> : Très peu d'élèves ont compris que pour $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(x)\in]0;1[$ et que, d'après le tableau de signes, cela impliquait $f'(x)>0$.

3. Conclure.

La question 2.(c) nous permet d'affirmer que f est croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. De plus $f(0)=0$. On en déduit que f est positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, ce qui revient à écrire :

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \sin(x)+\tan(x)-2x>0$$

ou encore

$$\boxed{\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[, 2x<\sin(x)+\tan(x)}.$$

Exercice 2. *Résolution d'une équation en utilisant la trigonométrie.*

1. (a) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$. On démontrera la formule.

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. La formule d'addition du cosinus donne $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$.
On a donc $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$, ce qui donne

$$\cos^2(\theta)=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

<u>Commentaire</u> : Cette formule, déjà démontrée dans le cours, aurait du être connue de tous !

(b) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

On a $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$ et, puisque $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$,
$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{4})}{2}$ d'après la question précédente.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\cos(\frac{\pi}{8}) &= \sqrt{\frac{1+\frac{2\sqrt{2}}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Le même raisonnement ($\frac{3\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\frac{3\pi}{8}) > 0$) montre que

$$\cos(\frac{3\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Commentaire : Trop peu d'élèves ont justifié le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. On rappelle que si $a \in \mathbb{R}+$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

(c) En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a $\sin(\frac{\pi}{8}) > 0$ et $\sin(\frac{3\pi}{8}) > 0$ donc $\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{8})}$ et $\sin(\frac{3\pi}{8}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{3\pi}{8})}$ ce qui donne $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) \\ &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) \\ &= (2\cos^2(\theta)-1)\cos(\theta) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) \\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta)(1-\cos^2(\theta)) \\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\end{aligned}$$

3. On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$$

On admet que cette équation admet au plus trois solutions réelles

(a) Rechercher les solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$ en posant $x = \cos(\theta)$. On les exprimera à l'aide de cosinus.

On pose $x = \cos(\theta)$, ce qui revient à rechercher les solutions de cette équation sur $[-1;1]$.
On doit alors résoudre

$$8\cos(\theta)^3 - 6\cos(\theta) - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$$

ce qui est éguivalent d'après la question précédente à

$$2\cos(3\theta) - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$$

ou encore à

$$\cos(3\theta) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 0$$

On en déduit les solutions de l'équation en θ : $3\theta = \frac{\pi}{8} + 2k\pi$ ou $3\theta = -\frac{pi}{8} + 2k\pi$. En se limitant aux solutions appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$, on trouve six valeurs possibles pour θ : $\frac{\pi}{8}$; $\frac{13\pi}{24}$; $\frac{19\pi}{24}$; $\frac{29\pi}{24}$ et $\frac{7\pi}{8}$.

Or on a posé $x = \cos(\theta)$ donc les cosinus de ces valeurs nous donne des solutions à l'équation de départ. Or parmi ces nombres, certains ont le même cosinus, ce qui ne donne que 3 valeurs de cosinus possibles : $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(\frac{13\pi}{24})$, et $\cos(\frac{35\pi}{24})$.

(b) Conclure.

Ces trois valeurs sont solutions de l'équation de départ et on a admis qu'il y avait au plus trois solutions. On a donc trouvé l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} ; \cos\left(\frac{13\pi}{24}\right) ; \cos\left(\frac{35\pi}{24}\right) \right\}$$

Remarque : On pourrait expliciter ces solutions en utilisant la formule d'addition pour trouver la valeur exacte de $\cos\left(\frac{13\pi}{24}\right)$ et $\cos\left(\frac{35\pi}{24}\right)$.

Exercice 3. *Une équation fonctionnelle.*
Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) + f(y)| = |x + y| \tag{1}$$

1. (a) On pose $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$.
   Montrer que f_1 vérifie (1).

   Soit $x \in \mathbb{R}$ (cela permet de raisonner en toute généralité, cf méthode pour montrer une proposition commencant par $\forall$). On a

   $$f_1(x) + f_1(y) \quad = \quad x + y$$

   D'où

   $$|f_1(x) + f_1(y)| \quad = \quad |x + y|$$

   On a donc bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, |f_1(x) + f_1(y)| = |x + y|}$ D'où f_1 vérifie bien (1)

   (b) On pose $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{cases}$.
   Montrer que f_2 vérifie (1).

   Soit $x \in \mathbb{R}$ (cela permet de raisonner en toute généralité, cf méthode pour montrer une proposition commencant par $\forall$). On a

   $$\begin{aligned} f_2(x) + f_2(y) &= -x + (-y) \\ &= -(x + y) \end{aligned}$$

   D'où

   $$\begin{aligned} |f_2(x) + f_2(y)| &= |-(x + y)| \\ &= |x + y| \end{aligned}$$

   On a donc bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, |f_2(x) + f_2(y)| = |x + y|}$ D'où f_2 vérifie bien (1)

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les propriétés (2) et (3), une est vraie. Laquelle ? On prouvera cette propriété.

$$(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow ((\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)) \tag{2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x) \tag{3}$$

La proposition vraie est la (3) :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x)$$

Supposons $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$ donc dans tous les cas $|f(x)| = x$.
Réciproquement supposons $(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $|f(x)| = |x|$ d'où $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.
On a donc l'équivalence souhaitée.

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1).
   (a) Montrer que $f(0) = 0$.

   En prenant x et y égaux à 0 dans la relation (1), on obtient $|2f(0)| = |0|$ d'où $f(0) = 0$

   (b) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|$$

   En prenant $y = x$ dans la relation (1), on obtient $|2f(x)| = |2x|$ d'où $|f(x)| = |x|$

   (c) i. Ecrire la négation de la propriété :
   $$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)$$

   La négation de cette propriété est :
   $$(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -x)$$

   ii. En raisonnant par l'absurde, montrer que :
   $$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)$$

   On suppose par l'absurde que la proposition que l'on veut démontrer est fausse (donc que sa négation, écrite à la question précédente est vraie). Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$ et soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \neq -y$ (il est absolument nécessaire de prendre des variables de noms différents car ce n'est pas nécéssairement le même x qui réalise les deux).
   On a nécéssairement $x \neq 0$ et $y \neq 0$ puisqu'on sait, d'après la question 3.a) que $f(0) = 0$ (donc aussi $f(0) = -0$). Puisque, d'après la question 3.b) $|f(x)| = |x|$ on a nécessairement $f(x) = -x$. De même, puisque $|f(y)| = |y|$, on a nécessairement $f(y) = y$. En réinjectant les résultats obtenus dans (1), on obtient
   $$|-x+y| = |x+y|$$
   On a donc soit $-x+y = x+y$ soit $-x+y = -(x+y)$. La première relation donne $2x = 0$ donc $x = 0$ ce qui est absurde. La deuxième relation donne $2y = 0$ ce qui donne $y = 0$ et est absurde aussi. Conclusion : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)}$

4. Conclure. On précisera bien le raisonnement utilisé.

   On raisonne par analyse synthèse.
   On vient de voir que si une fonction f vérifie (1), alors nécessairement $f = f_1$ ou $f = f_2$ (c'est l'étape d'analyse).
   De plus, d'après la question 1., les fonctions f_1 et f_2 vérifient bien (1) (c'est l'étape de synthèse).
   Conclusion : L'ensemble des fonctions vérifiant (1) est donc $\{f_1, f_2\}$

Exercice 4. *Raisonnement par récurrence.*
Dans cet exercice, on soignera particulièrement la rédaction.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 6$, on a :
$$2^n \geq 6n + 7.$$

Soit, pour $n \geq 6$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $2^n \geq 6n+7$. Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 6$.
Initialisation :
On a d'une part $2^6 = 64$ et d'autre part $6 \times 6 + 7 = 43$. Or $64 \geq 43$ donc $\mathcal{P}(6)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geq 6$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et déduisons en que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$2^n \quad \geq \quad 6n+7$$

En multipliant par 2 cette inégalité ($2 \geq 0$ donc on ne change pas le sens de l'inégalité) on en déduit

$$2 \times 2^n \quad \geq \quad 2 \times (6n+7)$$

ce qui donne

$$2^{n+1} \quad \geq \quad 12n+14$$

Or $12n+14 \geq 6n+13$ puisque $12n \geq 6n$ ($n \geq 0$) et $14 \geq 13$.
On a donc $12n+14 \geq 6(n+1)+7$ On en déduit, par transitivité de la relation d'ordre $\geq$, que

$$2^{n+1} \quad \geq \quad 6(n+1)+7$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on a donc $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq 6$

2. Soit $x \in]0;+\infty[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(x^n) = n\ln(x)$$

On pourra utiliser sans la démonter la propriété suivante :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \forall y \in]0;+\infty[,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Soit $x \in]0;+\infty[$ et soit, pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\ln(x^n) = n\ln(x)$. Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation :
On a d'une part $\ln(x^1) = \ln(x)$ et d'autre part $1 \times \ln(x) = \ln(x)$ d'où $\mathcal{P}(1)$ est vraie
Hérédité :
Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et déduisons en que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{array}{rcl} \ln(x^{n+1}) & = & \ln(x \times x^n) \\ & = & \ln(x) + \ln(x^n) \text{ d'après la propriété du ln que l'énoncé nous autorise à utiliser} \\ & = & \ln(x) + n\ln(x) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & = & (n+1)\ln(x) \end{array}$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on a donc $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq 1$