Corrigé DS2 niveau 2 : novembre 2023

Exercice 1. *10 points.*
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 2\cos(x)$
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + x\sin(x)\}$$
2. $y'' + y' + y = 5\sin(3x)$
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto C_1 e^{-\frac{x}{2}}\left(\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + C_2\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})\right) - \frac{40}{73}\sin(3x) - \frac{15}{73}\cos(3x)\}$$
3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{-x} + \lambda_1 x e^{-x} + \lambda_2 e^{-x}; \lambda_1 \in \mathbb{R}; \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$
4. $y'' - y = 2e^x$
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + xe^x; \lambda_1 \in \mathbb{R}; \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$
5. $y'' + 3y' + y = e^{4x}$
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda_1 e^{(\frac{-3-\sqrt{5}}{2})x} + \lambda_2 e^{(\frac{-3+\sqrt{5}}{2})x} + \frac{1}{29}e^{4x}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2. *6 points. Une fonction complexe.*
On s'intéresse à la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ z & \longmapsto & z + \frac{1}{z} \end{array}$$

1. (a) Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, établir le lien entre $f\left(\frac{1}{z}\right)$ et $f(z)$.

   Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On a $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + z$ donc $\boxed{f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)}$.

   (b) L'application f est-elle injective ?

   D'après la question précédente, il suffit de prendre $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $\frac{1}{z} \neq z$ et dans ce cas, on aura deux éléments différents qui s'envoient sur la même image. Prenons $z = 2$, on a $\frac{1}{2} \neq 2$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

2. (a) Soit $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Justifier que l'équation $z^2 - \omega z + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *On ne demande pas d'expliciter les solutions.*

   Cette équation est une équation de degré 2 et d'après le cours elle admet toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}$. Or cette solution ne peut être 0. En effet 0 ne satisfait pas l'équation : si $z = 0$ alors $z^2 - \omega z + 1 = 1 \neq 0$. Donc $\boxed{z^2 - \omega z + 1 = 0 \text{ admet au moins une solution dans } \mathbb{C}\backslash\{0\}}$.

   (b) L'application f est-elle surjective ?

   Soit $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. L'équation $f(z) = \omega$ équivaut (en multipliant par z) à l'équation $z^2 - \omega z + 1 = 0$. Or d'après la question précédente cette dernière équation admet toujours au moins une solution z dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Cette solution est précisément un antécédent de ω par f. Ainsi $\boxed{f \text{ est surjective vers } \mathbb{C}\backslash\{0\}}$.

3. On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$.

   (a) Montrer que si $z \in \mathbb{U}$ alors $|f(z)| \leq 2$.

   Soit $z \in \mathbb{U}$. On a d'après l'inégalité triangulaire (complexe) :
$$|f(z)| = \left|z + \frac{1}{z}\right| \leq |z| + \left|\frac{1}{z}\right|$$
   mais comme $z \in \mathbb{U}$, on a $|z| = 1$ et par propriété du module, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$. Finalement $\boxed{|f(z)| \leq 2}$.

(b) Rappeler la forme exponentielle des éléments de $\mathbb{U}$.

Soit $z \in \mathbb{U}$. On sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{z = e^{i\theta}}$.

(c) Montrer que si $z \in \mathbb{U}$ est d'argument θ alors $f(z) = 2\cos(\theta)$. Retrouver l'inégalité précédente $|f(z)| \leq 2$.

Soit $z \in \mathbb{U}$. On sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Ainsi

$$f(z) = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

et par la formule d'Euler, on a $\boxed{f(z) = 2\cos(\theta)}$. Ainsi $|f(z)| = 2|\cos(\theta)|$ et comme $|\cos(\theta)| \leq 1$ (ici la valeur absolue) on retrouve $\boxed{|f(z)| \leq 2}$.

(d) Déterminer l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{U}$ tels que $|f(z)| = 2$.

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. D'après la question précédente, on a :

$$|f(z)| = 2 \Longleftrightarrow 2|\cos(\theta)| = 2 \Longleftrightarrow |\cos(\theta)| = 1.$$

Or les solutions de $\cos(\theta) = 1$ sont $\{0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et les solutions de $\cos(\theta) = -1$ sont $\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. On peut regrouper l'ensemble des solutions en $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Autrement dit les seules solutions dans $\mathbb{U}$ sont $\boxed{1 \text{ et } -1}$.

4. Déterminer $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$ et $f(-i)$. En déduire $f(\mathbb{U}_4)$.

On a $\boxed{f(1) = 2}$, $\boxed{f(-1) = -2}$, $\boxed{f(i) = 0}$ et $\boxed{f(-i) = 0}$. Comme $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ on en déduit que $\boxed{f(\mathbb{U}_4) = \{0, -2, 2\}}$.

5. Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

On calcule le discriminant de l'équation qui vaut $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$. L'équation admet donc deux solutions complexes qui sont :

$$\boxed{z_1 = \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2}} \text{ et } \boxed{z_2 = \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}}.$$

6. Montrer que $\omega \in \mathbb{U}_5$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0$.

On a d'après la formule de De Moivre $\omega^5 = e^{i2\pi} = 1$ donc $\boxed{\omega \in \mathbb{U}_5}$ et la somme étant géométrique de raison ω on a :

$$\sum_{k=0}^{4} \omega^k = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0.$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0}$.

Montrer, à l'aide de *ii.*, que $(f(\omega))^2 + f(\omega) - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
(f(\omega))^2 + f(\omega) - 1 &= \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \omega + \frac{1}{\omega} - 1 \\
&= \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2} + \omega + \frac{1}{\omega} - 1 \\
&= \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2
\end{aligned}$$

Or $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ d'après i. donc en divisant par ω^2, cette égalité devient $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0$. On en déduit que $\boxed{(f(\omega))^2 + f(\omega) - 1 = 0}$. Mais l'équation $z^2 + z - 1 = 0$ admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \qquad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Cela signifie que $f(\omega) \in \{z_1, z_2\}$. De plus $f(\omega) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ d'après 3.c) et $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc son cosinus est strictement positif. Ainsi $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ d'où $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$.

On considère l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\}$.

1. Que représente géométriquement l'ensemble D ?

   L'ensemble D représente $\boxed{\text{le disque unité centré en 0 privé du cercle trigonométrique et de l'origine 0}}$.

2. Montrer que si $z, z' \in D$ alors $zz' \in D$. En particulier montrer que $zz' \neq 1$.

Soit z et z' deux nombres complexes dans D. On a par définition de D, $0 < |z| < 1$ et $0 < |z'| < 1$. Donc $0 < |z||z'| < 1$ et d'après les propriétés du module $0 < |zz'| < 1$. Cela signifie que $\boxed{zz' \in D}$ et en particulier $\boxed{zz' \neq 1}$.

Montrer que la restriction $f_{|D}$ de f à D est injective.

Soit $z, z' \in D$ tels que $f(z) = f(z')$. Cette dernière égalité se traduit par :

$$z + \frac{1}{z} = z' + \frac{1}{z'}$$

et en multipliant par zz' (non nul car z et z' sont non nuls) on obtient :

$$z^2 z' + z' = (z')^2 z + z.$$

En factorisant par zz' on a :

$$zz'(z - z') + z' - z = 0$$

et donc $(z - z')(zz' - 1) = 0$. Mais d'après (b) on sait que $zz' \neq 1$ et donc $z - z' = 0$ ie $z = z'$. On en déduit que $\boxed{f_{|D} \text{ est injective}}$.