Corrigé DM 1

Exercice 1 feuille photocopiée

Exercice 2 feuille photocopiée

Exercice 3. *Un calcul de somme*

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions polynômiales. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

En utilisant cette expression développée et en dérivant chacun des termes (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées) on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

Attention : On a isolé le premier terme car la dérivée de $x \mapsto x^0$ est la fonction identiquement nulle et non $x \mapsto x^{-1}$.

3. En prenant $x = 1$ dans les deux expressions on trouve

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k 1^{k-1}$$

c'est à dire

$$n \times 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$$

4. On a $n \geq 2$ donc $n-1 \geq 1$ donc la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque polynomiale et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

En dérivant terme à terme l'expression

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

on obtient

$$f''(x) = 0 + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$$

5. En prenant $x = 1$ dans les deux expressions de $f''(x)$, on trouve

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)1^{k-2} = n(n-1)(1+1)^{n-2}$$

6. On remarque ensuite que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}$$

(puisque pour $k = 1$, on a $k(k-1) = 0$). On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) = n(n-1)2^{n-2}$$

or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2-n2^{n-1}\end{aligned}$$

on a donc

$$n(n-1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2-n2^{n-1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2 &= n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}\\ &= (n^2-n+2n)\times 2^{n-2}\\ &= (n^2+n)\times 2^{n-2}\\ &= n(n+1)\times 2^{n-2} \qquad \blacksquare\end{aligned}$$