Corrigé DM 3

Exercice 1. *Application aux calcul de puissances de matrices .*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. On a $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$.
2. On a $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + aX + b$ Le polynôme $X^2 - 3X + 2$ admet 1 et 2 pour racines donc on peut évaluer en 1 et 2. On obtient
$$\begin{cases} 1 = 0 + a + b \\ 2^n = 0 + 2a + b \end{cases}$$
ce qui donne $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$.
On a donc $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$
3. En applicant la relation obtenue en A :
$$A^n = (A^2 - 3A + 2I)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$$
ce qui donne, puisque $Q(A) = 0$,
$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$$
Cela donne, après calculs et simplifications :
$$A^n = \begin{pmatrix} 6 \times 2^n - 2 & 5(2^n - 1) \\ -6(2^n - 1) & -5 \times 2^n + 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit $x \in]-1, 1[$ et f définie par :
$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$
En effectuant le changement de variable : $t = \sin u$ avec $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $dt = \cos(u)du$ et $u = \arcsin(t)$ donc lorsque $t = 0$ on a $u = 0$ et lorsque $t = x$ on a $u = \arcsin(x)$.
D'où
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\sin^2(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} \cos(u)du \\ &= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\sin^2(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} \cos(u)du \end{aligned}$$
Or puisque $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(u) \geq 0$ et donc $\sqrt{\cos^2(u)} = \cos(u)$.
D'où
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\arcsin(x)} \sin^2(u)du \\ &= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1-\cos(2u)}{2} du \\ &= \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right] \\ &= \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{\sin(2\arcsin(x))}{4} \\ &= \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 3 photocopie

Exercice 4 photocopie

Exercice 5 photocopie