I Généralités sur les nombres de Stirling

I.A. Premières propriétés des nombres de Stirling

I.A.1.

a) La seule décomposition de 3 en somme de deux entiers non nuls est $3 = 1 + 2$.
Ainsi, si E est de cardinal 3, toute partition de E en deux, comporte deux ensembles de cardinal respectif 1 et 2. Pour l'ensemble de cardinal 1, il existe $\binom{3}{1} = 3$ possibilités, l'ensemble de cardinal 2 est entièrement déterminé comme le complémentaire du premier dans E. On en déduit

$$\boxed{S_{3,2} = 3}$$

b) La seule partition de E en une partie est $\{E\}$.

$$\boxed{S_{n,1} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*}$$

Il n'y a qu'une façon de faire une partition d'un ensemble de cardinal n en n sous-ensembles non vides : chaque sous-ensemble est un singleton (de cardinal 1) ; l'ordre de ces singletons n'ayant pas d'incidence, on a

$$\boxed{S_{n,n} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*}$$

I.A.2.

a) **i.** La seule partition de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$ est :

$$\{\{1,2,3\}, \{4\}\}$$

a) **ii.** Les partitions de E en deux, qui ne contiennent pas le singleton $\{4\}$, sont :

$$\{\{1,4\}, \{2,3\}\} \quad \{\{2,4\}, \{1,3\}\} \quad \{\{3,4\}, \{1,2\}\}$$

$$\{\{1\}, \{2,3,4\}\} \quad \{\{2\}, \{1,3,4\}\} \quad \{\{3\}, \{1,2,4\}\}$$

a) **iii.** Considérons une partition en deux parties de E. Soit elle contient le singleton $\{4\}$, soit elle ne le contient pas. Dénombrons séparément celles qui contiennent le singleton $\{4\}$ et les autres.

Si elle contient comme partie le singleton $\{4\}$, l'autre partie est nécessairement une partition en un seul élément de $E - \{4\}$. Le nombre de partitions de E en deux parties dont l'une est le singleton $\{4\}$ est donc $S_{3,1}$

Si elle ne contient pas le singleton $\{4\}$, on peut l'interpréter comme une partition en deux parties de $E - \{4\}$ à laquelle l'élément 4 a été ajouté dans l'une des deux parties. Réciproquement, chaque partition de $E - \{4\}$ en deux parties, fournit ainsi deux partitions de E en deux parties, qui sont des partitions non composées du singleton $\{4\}$. Ainsi, le nombre de partitions de E en deux parties ne comportant pas le singleton $\{4\}$ est le double du nombre de partitions de $E - \{4\}$ en deux parties, soit $2S_{3,2}$.

En résumé, on a montré

$$S_{4,2} = S_{3,1} + 2S_{3,2}$$

ce qui est bien un cas particulier de

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

b) **i.** Les partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$ sont en bijection avec les partitions de $E-\{x_n\}$ en $k-1$ parties. Elles ont donc même cardinal

$$\boxed{\text{Le nombre de partitions de } E \text{ en } k \text{ parties dont l'une est } \{x_n\} \text{ est } S_{n-1,k-1}}$$

b) **ii.** De toute partition de $E-\{x_n\}$ en k parties, on peut construire k partitions distinctes de E en k parties, il suffit d'ajouter x_n à l'une des k parties. On construit ainsi toutes les partitions de E en k parties qui ne comportent pas le singleton $\{x_n\}$

$$\boxed{\text{Le nombre de partitions de } E \text{ en } k \text{ parties dont aucune n'est } \{x_n\} \text{ est } kS_{n-1,k}}$$

b) **iii.** Soit une partition de E en k parties contient le singleton $\{x_n\}$, soit elle ne le contient pas. Le nombre de partitions de E en k parties est donc la somme du nombre de partitions de E en k parties qui contiennent $\{x_n\}$ et du nombre de partitions de E en k parties qui ne contiennent pas $\{x_n\}$:

$$\boxed{S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k} \quad \forall n \geq 2\,, \forall\, k \in \{1, \dots, n-1\}}$$

I.A.3.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$ pour $n \geq 2$.

Démontrons la par récurrence.

Pour $n = 2$, la propriété affirme $S_{2,1} = 1$, ce qui est cohérent avec le résultat de la question **I.A.1.b**.

Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie à un certain rang n et démontrons-la à l'ordre $n+1$.

On a

$$\begin{aligned}
S_{n+1,n} &= S_{n,n-1} + nS_{n,n} && \text{(d'après la question précédente)}\\
&= \frac{n(n-1)}{2} + n \times 1 && \text{(d'après la question } \textbf{I.A.1.b} \text{ et l'hypothèse de récurrence)}\\
&= \frac{n(n-1)+2n}{2}\\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

$$\boxed{S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \forall\, n \geq 2}$$

I.A.4. En utilisant $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k} \quad \forall n \geq 2\,, \forall\, k \in \{1, \dots, n-1\}$, dans le cas $n \geq 3$ et $k = 2$ (ce qui est compatible avec les conditions), on en déduit successivement :

$$S_{n,2} = S_{n-1,1} + 2S_{n-1,2}$$

$$S_{n,2} = 1 + 2S_{n-1,2}$$

$$S_{n,2} + 1 = 2 + 2S_{n-1,2}$$

$$\boxed{S_{n,2} + 1 = 2(S_{n-1,2} + 1)}$$

Ainsi, la suite $(S_{n,2}+1)_{n\geq 2}$ est une suite géométrique de raison 2. On en déduit (puisque $S_{2,2} = 1$)

$$S_{n,2} + 1 = 2^{n-2}(S_{2,2}+1) = 2^{n-1}$$

$$\boxed{S_{n,2} = 2^{n-1} - 1 \quad \forall n \geq 2}$$

I.A.5.

a) On suppose $n < k$. Soit f une application de E dans F. Le cardinal de $f(E)$ est inférieur ou égal à $\text{Card}(E) = n$, et donc l'image de E par f est de cardinal strictement plus petit que k. L'application f ne peut pas être surjective.

$$\boxed{\sigma_{n,k} = 0 \quad \text{si } k < n}$$

b) On suppose $n = k$. Toute application surjective est alors nécessairement bijective. Compter le nombre de surjections, c'est compter le nombre de bijections dont on sait qu'il est égal à $n!$

$$\boxed{\sigma_{n,k} = n! \quad \text{si } k = n}$$

c) Soit f une surjection de E dans F. On a $F = \{y_1, y_2\}$. Notons A_1 l'image réciproque de y_1 et A_2 celle de y_2 ; ce sont deux parties de E non vides puisque f est une surjection. De plus, $\{A_1, A_2\}$ est une partition de E. Toutefois, $\{A_2, A_1\}$ est la même partition de E mais correspond à une autre surjection de E dans F. Ainsi, à toute partition en deux parties de E correspond exactement deux surjections de E dans F. On en déduit

$$\boxed{\sigma_{3,2} = 2S_{3,2} = 6}$$

d) i. Montrons que $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ est une partition de E :

- Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. L'ensemble A_i est une partie de E puisque c'est l'image réciproque par f d'une partie de F.
- Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. L'ensemble A_i n'est pas vide puisque f est surjective.
- Soit $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ distincts. L'ensemble $A_i \cap A_j$ est vide car sinon un élément de cette intersection aurait à la fois pour image y_i et y_j ; ce qui est impossible car y_i et y_j sont supposés distincts.
- La réunion des A_i pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ est par construction $f^{-1}(F) = E$

$$\boxed{\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_k\} \text{ est bien une partition de } E}$$

d) ii. Soit $\mathscr{A}' = \{A'_1, \ldots, A'_k\}$ une partition de E. Le nombre de surjections associées à cette partition est égal au nombre de bijections entre $\{A'_1, \ldots, A'_k\}$ et F ; or le nombre de bijections entre deux ensembles de cardinal k est $k!$.

$$\boxed{\text{Le nombre de surjections associées à } \mathscr{A}' \text{ est } k!}$$

d) iii. On en déduit immédiatement

$$\boxed{\sigma_{n,k} = k!S_{n,k}}$$

I.A.6. Démontrons la propriété par récurrence sur n :

Pour $n = 0$, la seule valeur de k comprise entre 0 et n est 0. Comme $S_{0,0} = 1 \leq 0^0$, la propriété est vérifiée.Pour $n = 1$, les valeurs de k comprises entre 0 et 1 sont 0 et 1 et on vérifie que $S_{1,0} = 0 \leq 0^1$ et que $S_{1,1} = 1 \leq 2^1$.

Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$, avec k compris entre 0 et $n-1$. On cherche à démontrer la propriété à l'ordre n, avec k compris entre 1 et n. Nous allons traiter d'abord le cas où k est compris entre 0 et $n-1$, puis le cas où $k = n$.

Tout d'abord considérons k un entier compris entre 0 et $n-1$. On a

$$\begin{array}{rcl} S_{n,k} & = & S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k} \\ & \leq & (2(k-1))^{n-1} + k(2k)^{n-1} \\ & \leq & 2^{n-1}[(k-1)^{n-1} + k^n] \\ & \leq & 2^{n-1}[k^n + k^n] \\ & \leq & (2k)^n \end{array}$$

Traitons maintenant le cas $k = n$. On a $S_{n,n} = 1 \leq (2n)^n$.

La propriété est donc vraie à l'ordre n pour toute valeur de k comprise entre 0 et k.

$$\boxed{S_{n,k} \leq (2k)^n \quad \forall n \in \mathbf{N},\ \forall k \in \{0, \ldots, n\}}$$

I.B. Utilisation des nombres de Stirling en algèbre linéaire

I.B.1. La famille $\{P_0, \ldots, P_N\}$ est une famille de $N+1$ polynômes à degré échelonné ;

$$\boxed{\{P_0, \ldots, P_N\} \text{ est une base de } \mathbf{R}_N[X]}$$

I.B.2.

a)Soit $k \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$P_{k+1} = \prod_{j=0}^{k}(X-j) = (X-k)\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) = (X-k)P_k = XP_k - kP_k$$

On en déduit

$$\boxed{XP_k = P_{k+1} + kP_k \qquad \forall\, k \in \{0, \ldots, N-1\}}$$

b) Démontrons la propriété par récurrence.

Pour $n = 0$, elle se traduit par $1 = 1$, donc elle est vérifiée.

Supposons-la vrai au rang $n-1$ (pour $n \geq 1$) : $X^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k}P_k$

On a alors

$$\begin{aligned}
X^n &= XX^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k}XP_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k}(P_{k+1} + kP_k) \qquad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k}P_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k}kP_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} S_{n-1,k-1}P_k + \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k}kP_k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1}(S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k})P_k\right) + S_{n-1,n-1}P_n + S_{n-1,0}0P_0 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} S_{n,k}P_k\right) + S_{n-1,n-1}P_n \qquad \text{(d'après la question } \textbf{I.A.2.b)iii}\text{)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} S_{n,k}P_k\right) + S_{n,n}P_n \qquad \text{(puisque } S_{n-1,n-1} = S_{n,n} = 1\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k
\end{aligned}$$

$$\boxed{X^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k \qquad \forall\, n \in \{0, \ldots, N\}}$$

I.B.3. La matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des éléments X^n de $\mathscr{B}_0$ dans la base $\mathscr{B}$. Or ces coordonnées sont précisés à la question précédente.

$$M = \begin{pmatrix} S_{0,0} & S_{1,0} & \dots & S_{N,0} \\ 0 & S_{1,1} & \dots & S_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & S_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & S_{n,k} & S_{N,k} \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, M est une matrice triangulaire supérieure d'ordre $N+1$, dont le coefficient sur la ligne k et colonne n (pour $k, n \in \{0, \dots, N\}$) est égal à $S_{n,k}$ si $k \leq n$ et 0 si $k > n$.

Les coefficients sur la diagonales sont tous égaux à 1.

I.B.4.

a) La matrice M étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent sur la diagonales et on a

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } M \text{ est } (X-1)^{N+1}}$$

b) Soit $N \geq 2$. M est une matrice d'ordre au moins 3 non diagonale (le coefficient sur la deuxième ligne,dernière colonne n'est pas nul, il vaut 1). Si on suppose que M est diagonalisable alors, M serait semblable à une matrice diagonale dont les coefficients sur la diagonale seraient les valeurs propres de M. La seule valeur propre de M étant 1, la matrice M serait semblable à la matrice identité. Or la matrice identité n'est semblable qu'à elle-même. Comme M n'est pas la matrice identité, elle ne peut pas être diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si } N \geq 2, \text{ la matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Si $N = 1$, la matrice M est une matrice 2×2 diagonale, puisque c'est la matrice identité ; elle est donc diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si } N = 1, \text{ la matrice } M \text{ est diagonale}}$$

I.C. Un lien entre nombres de Stirling et loi de Poisson

I.C.1. Pour x non nul, posons $u_i = \frac{i^n}{i!}|x|^i$. La suite (u_i) est à termes strictement positifs, on peut utiliser le critère de d'Alembert.

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{u_{i+1}}{u_i} = \lim_{i \to +\infty} \left(\frac{i+1}{i}\right)^n \frac{|x|}{i+1} = 0$$

La série de terme général u_i est donc absolument convergente quelque soit la valeur de $x \neq 0$. Pour $x = 0$, la série converge clairement.

$$\boxed{\text{Le rayon de la série entière } \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^n}{i!} x^i \text{ est } +\infty}$$

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f_n \text{ est } \mathbf{R}}$$

I.C.2.

- $f_0(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^0}{i!} x^i = e^x$
- $f_1(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^i = x \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^{i-1} = x \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = x\, e^x$

- $f_2(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^2}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i^2}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{(i-1)!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i-1+1}{(i-1)!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i-1}{(i-1)!} x^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^i$
$= \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i-1}{(i-1)!} x^i + x \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^{i-1} = x^2 \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{(i-2)!} x^{i-2} + x \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^{i-1}$
$= x^2\, e^x + x\, e^x = x(x+1)e^x$

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} f_0(x) = & e^x \\ f_1(x) = & x\, e^x \\ f_2(x) = & x(x+1)\, e^x \end{cases}}$$

I.C.3. Il suffit de lire la définition de P_k

$$\boxed{P_0(i) = 1 \quad \forall\, i \in \mathbf{N}}$$

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbf{N}^*,\; P_k(i) = \begin{cases} 0 & \forall\, i \in \{0, \ldots, k-1\} \\ \dfrac{i!}{(i-k)!} & \forall i \geq k \end{cases}}$$

I.C.4. Comme $X^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} P_k$, $\forall\, n \in \{0, \ldots, N\}$, il suffit de choisir N suffisamment grand (c'est-à dire plus grand que n) et d'évaluer cette expression en $X = i$, on obtient

$$\boxed{i^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} P_k(i) \qquad \forall\, i,\, n \in \mathbf{N}}$$

I.C.5.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^n}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} P_k(i)}{i!} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} P_k(i)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \frac{P_k(i)}{i!} x^i \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{+\infty} S_{n,k} \frac{P_k(i)}{i!} x^i \end{aligned}$$

On a pu intervertir les deux symboles de sommation car le second porte sur un nombre fixe d'éléments.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{+\infty} S_{n,k} \frac{P_k(i)}{i!} x^i$$

Pour $k = 0$, $S_{n,0} = 0$ pour toute valeur de n. Ainsi $\sum_{i=0}^{+\infty} S_{n,0} \frac{P_0(i)}{i!} x^i = S_{n,0} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{(i-k)!}$ est une égalité triviale. Pour $k \neq 0$, on utilise les résultats de la question **I.C.3** et on obtient bien :

$$\boxed{f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{x^i}{(i-k)!}}$$

On en déduit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{x^i}{(i-k)!} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^k \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{x^{i-k}}{(i-k)!} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{(i)!}$$

D'où

$$\boxed{f_n(x) = e^x \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^k}$$

I.C.6. Comme Y suit une loi de Poisson de paramètre 1, on a $P(Y=i) = \frac{e^{-1}}{i!}$. L'espérance de Y^n existe si et seulement si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{i^n}{i!}$ converge. Or cette expression n'est autre que $e^{-1} f_n(1)$ dont on sait qu'elle converge. On a donc $E(Y^n)$ existe et vaut

$$\boxed{E(Y^n) = e^{-1} f_n(1) = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}}$$

D'après le cours, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ont toutes les deux pour valeur λ. De plus, d'après Huygens, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. On en déduit

$$E(Y) = 1 \quad \text{et} \quad E(Y^2) = V(Y) + (E(Y))^2 = 2$$

Comparons ces valeurs avec celles obtenues en utilisant les nombres de Stirling

$$E(Y) = S_{1,0} + S_{1,1} = 0 + 1 = 1 \quad \text{et} \quad E(Y^2) = S_{2,0} + S_{2,1} + S_{2,2} = 0 + 1 + 1 = 2$$

Les résultats sont compatibles.

$$\boxed{E(Y) = 1 \qquad E(Y^2) = 2}$$

I.D. Comportement asymptotique des nombres de Stirling

I.D.1

a) Posons $y(x) = \dfrac{1}{(k+1)!}(e^x - 1)^{k+1}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et on a alors :

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{(k+1)}{(k+1)!}(e^x-1)^k e^x = \frac{1}{k!}(e^x-1)^k e^x \\
&= \frac{1}{k!}(e^x-1)^k((e^x-1)+1) = (k+1)\frac{1}{(k+1)!}(e^x-1)^{k+1} + \frac{1}{k!}(e^x-1)^k \\
&= (k+1)y(x) + \frac{1}{k!}(e^x-1)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{(k+1)!}(e^x-1)^{k+1} \text{ est solution de } y' = (k+1)y(x) + \frac{1}{k!}(e^x-1)^k}$$

b) L'équation différentielle homogène associée est à coefficients constants, ses solutions sont de la forme $y_h(x) = \lambda e^{(k+1)x}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. La question précédente nous fournit une solution particulière de l'équation avec second membre.

On en déduit

$$\boxed{\text{Les solutions de (I.1) sont les fonctions de la forme } x \mapsto \lambda e^{(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)!}(e^x-1)^{k+1} \text{ avec } \lambda \in \mathbf{R}}$$

I.D.2

a) Posons $u_n = \frac{S_{n,k}}{n!}x^n$. Essayons de majorer $|u_n|$ par le terme général d'une série convergente. Comme $S_{n,k} \leq (2k)^n$, on a $|u_n| \leq \dfrac{(2k)^n}{n!}|x|^n$. Posons $v_n = \frac{(2k)^n}{n!}|x|^n$ c'est le terme général d'une série convergente dont on reconnaît la somme : $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(2k)^n}{n!}|x|^n = e^{2k|x|}$. Ainsi, u_n est le terme général d'une série absolument convergente quelle que soit la valeur de x.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geq k} \frac{S_{n,k}}{n!}x^n \text{ est } +\infty}$$

b) Pour $k = 0$, on a $\forall\, x \in \mathbf{R}$,

- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{S_{n,0}}{n!}x^n = \sum_{n=0} \frac{S_{n,0}}{n!}x^n + \sum_{n>0} \frac{S_{n,0}}{n!}x^n = \frac{S_{0,0}}{0!}x^0 + \sum_{n>0} \frac{0}{n!}x^n = 1$
- $\dfrac{1}{0!}(e^x - 1)^0 = 1$

Ces deux quantités étant égales,

$$\boxed{\text{L'égalité (I.2) est vérifiée pour } k = 0}$$

c) Soit k un entier tel que (I.2) soit vérifiée.

Considérons d'abord le cas $k = 0$. Supposons $k = 0$ et posons $y_0(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{n,1}}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = e^x - 1$.

La fonction y_0 est bien solution de l'équation différentielle (I.1) :

$$y_0'(x) - y_0(x) \quad = \quad e^x - (e^x - 1) = 1 = \frac{1}{0!}(e^x - 1)^0$$

Dorénavant, on suppose $k \neq 0$. Posons $y_k(x) = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n$. D'après **a)**, la série entière $x \mapsto y_k(x)$ est bien définie sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, on a $y_k'(x) = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{(n-1)!}x^{n-1}$. Comme $k \neq 0$, on a donc $n \geq 2$. On peut donc la propriété démontrée en (I.A.2) de la façon suivante :

$$S_{n,k+1} = S_{n-1,k} + (k+1)S_{n-1,k+1} \quad \forall n \geq 2\,, \forall\, k \in \{0, \ldots, n-2\}$$

(qui n'est donc valable que pour $n \geq k+2$; il faudra y faire attention).

Montrons que y_k est solution de l'équation différentielle (I.1) :

$$y_k'(x) - (k+1)y_k(x) \quad = \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{(n-1)!}x^{n-1} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n$$

On va séparer la première somme en deux.

$$\begin{aligned}
y_k'(x) - (k+1)y_k(x) \quad &= \quad \frac{S_{k+1,k+1}}{k!}x^k + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{(n-1)!}x^{n-1} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n \\
&= \quad \frac{x^k}{k!} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{S_{n-1,k} + (k+1)S_{n-1,k+1}}{(n-1)!}x^{n-1} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n \\
&= \quad \frac{x^k}{k!} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{S_{n-1,k}}{(n-1)!}x^{n-1} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{(k+1)S_{n-1,k+1}}{(n-1)!}x^{n-1} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n
\end{aligned}$$

On change l'indexation de façon à faire apparaître x^n dans chaque somme

$$\begin{aligned}
y_k'(x)-(k+1)y_k(x) &= \frac{x^k}{k!}+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{n,k}}{n!}x^n+(k+1)\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n-(k+1)\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n \\
&= \frac{x^k}{k!}+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{n,k}}{n!}x^n \\
&= \frac{S_{k,k}}{k!}x^k+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{n,k}}{n!}x^n \\
&= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{S_{n,k}}{n!}x^n \\
&= \frac{1}{k!}(e^x-1)^k \qquad \text{(par hypothèse sur } k)
\end{aligned}$$

Nous avons montré :

$$\boxed{\text{Pour } k\in\mathbf{N} \text{ tel que la proposition (I.2) est vraie, } \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n \text{ est une solution de l'équation différentielle (I.1)}}$$

d) Démontrons la proposition (I.2) par récurrence sur k.
Elle est vraie à l'ordre $k=0$ d'après **b)**.

Supposons qu'il existe k tel qu'elle soit vraie. Alors, d'après **c)** $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n$ est une solution de l'équation différentielle (I.1). Or toute solution de (I.1) s'écrit $\lambda e^{(k+1)x}+\frac{1}{(k+1)!}(e^x-1)^{k+1}$ d'après **I.D.1.b)**. Il existe donc $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n=\lambda e^{(k+1)x}+\frac{1}{(k+1)!}(e^x-1)^{k+1}$. Calculons la valeur de λ en évaluant les deux membres de l'égalité en $x=0$. On en déduit $\lambda=0$ et donc

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n=\frac{1}{(k+1)!}(e^x-1)^{k+1}$$

Autrement dit, la proposition (I.2) est vérifiée à l'ordre $k+1$. On l'a ainsi démontrée par récurrence.

$$\boxed{\forall k\in\mathbf{N},\,\forall x\in\mathbf{R}\qquad \sum_{n=k}^{\infty}\frac{S_{n,k}}{n!}x^n=\frac{1}{k!}(e^x-1)^k}$$

I.D.3

Soit k un entier. Nous avons les égalités successives suivantes :

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{S_{n,k}}{n!}x^n=\frac{1}{k!}(e^x-1)^k$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}S_{n,k}\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{jx}(-1)^{k-j}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_{n,k}\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(jx)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_{n,k}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}j^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

Deux séries entières sont égales si et seulement si elle ont même coefficients. On en déduit, en particulier

$$\forall\ n \geq k, \quad S_{n,k} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}j^n$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbf{N},\, \forall k \in \{0,\dots,n\}, \quad S_{n,k} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}j^n}$$

I.D.4

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n,k}}{k^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\frac{j^n}{k^n} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\lim_{n\to+\infty}\frac{j^n}{k^n}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{j}{k}\right)^n = \begin{cases}0 & \text{si } j \in \{0,\dots,k-1\}\\ 1 & \text{si } j = k\end{cases}$. D'où,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n,k}}{k^n} = \frac{1}{k!}\binom{k}{k}(-1)^{k-k} = \frac{1}{k!}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n,k}}{k^n} = \frac{1}{k!}}$$

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{n,k}}{\frac{k^n}{k!}} = 1$ et donc un équivalent de $S_{n,k}$ lorsque $n \to +\infty$:

$$\boxed{S_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k^n}{k!}}$$

II Nombres de Stirling et problème du collectionneur

II. A. Équivalent de $E(k)$ lorsque $k \to +\infty$

II.A.1 Le nombre minimum d'achats nécessaires pour obtenir une vignette de la collection est évidemment 1. On en déduit que la loi de la variable aléatoire X_1 est :

$$\boxed{\forall \ell \in \mathbf{N} \quad P(X_1 = \ell) = \begin{cases}1 & \text{si } \ell = 1\\ 0 & \text{si } \ell \neq 1\end{cases}}$$

L'espérance s'interprétant comme la valeur moyenne, on a alors

$$\boxed{E(X_1) = 1}$$

II.A.2 Un collectionneur possédant déjà i vignettes, lorsqu'il achète une tablette supplémentaire, a une probabilité $\frac{i}{k}$ de tomber sur une vignette qu'il possède déjà et une probabilité $\frac{k-i}{k}$ de tomber sur une vignette qu'il ne possède pas. Pour qu'il obtienne une nouvelle vignette au bout du ℓ achats, c'est que sur les $\ell-1$ premiers achats, il a obtenu des vignettes qu'il possédait déjà et qu'au ℓ-ième achat, il en a eu une nouvelle ; autrement dit, la loi de Z_i est la suivante :

$$\forall i \in \{1,\dots,k\}, \quad \forall \ell \in \mathbf{N}^*, \quad P(Z_i=\ell) = \left(\frac{i}{k}\right)^{\ell-1}\left(\frac{k-i}{k}\right)$$

$$\boxed{\forall i \in \{1,\dots,k\}, \quad Z_i \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \frac{k-i}{k}}$$

On en déduit son espérance (puisque l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $1/p$) :

$$\boxed{\forall i \in \{1,\dots,k\}, \quad E(Z_i) = \frac{k}{k-i}}$$

II.A.3 Soit i compris entre 1 et $k-1$. Pour obtenir $i+1$ vignettes différentes, il faut commencer par obtenir i vignettes différentes, et une fois ces i vignettes obtenues, il faut en obtenir une que l'on ne possède pas déjà. Ainsi,

$$X_{i+1} = X_i + Z_i$$

De cette égalité, on déduit

$$\boxed{\forall i \in \{1,\dots,k-1\}, \quad X_{i+1} - X_i = Z_i}$$

II.A.4 Partons de l'expression de droite de l'égalité pour arriver à montrer qu'elle est égale à son expression de gauche :

$$\begin{aligned}
X_1 + \sum_{i=1}^{k-1}(X_{i+1}-X_i) &= X_1 + \sum_{i=1}^{k-1} X_{i+1} - \sum_{i=1}^{k-1} X_i \\
&= X_1 + \sum_{i=2}^{k} X_i - \sum_{i=1}^{k-1} X_i \\
&= X_1 + X_k - X_1 \\
&= X_k
\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{X_k = X_1 + \sum_{i=1}^{k-1}(X_{i+1}-X_i)}$$

Passons à l'espérance ; l'espérance étant un opérateur linéaire, on en déduit

$$\boxed{E(X_k) = E(X_1) + \sum_{i=1}^{k-1}\left(E(X_{i+1}) - E(X_i)\right) = E(X_1) + \sum_{i=1}^{k-1} E(Z_i)}$$

II.A.5

a) Cherchons un équivalent de $u_n - u_{n-1}$ lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n-1} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - \ln n - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\right) + \ln(n-1)\\
&= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Un équivalent de $u_n - u_{n-1}$ en $+\infty$ est donc $\dfrac{1}{2n^2}$. En particulier, au voisinage de $+\infty$, le terme $u_n - u_{n-1}$ garde un signe strictement positif. On peut donc utiliser les théorèmes de comparaison pour les séries numériques.

La série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ est une série de Riemann convergente. Deux séries positives, ayant des termes équivalents, sont de même nature. On en déduit

$$\boxed{\text{La série de terme } u_n - u_{n-1} \text{ est convergente.}}$$

La série étant convergente, sa somme partielle a une limite. Or par téléscopage, on a

$$\sum_{n=2}^{N} (u_n - u_{n-1}) = u_N - u_1 = u_N$$

La limite de la suite (u_n), lorsque n tend vers $+\infty$, existe et est égale à la somme de a série de terme $u_n - u_{n-1}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ est convergente}}$$

b) Reprenons le résultat de la question **II.A.4** :

$$\begin{aligned}
E(X_k) &= E(X_1) + \sum_{i=1}^{k-1} E(Z_i)\\
&= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k}{k-i} \qquad \text{(d'après } \textbf{II.A.2}\text{)}\\
&= 1 + k\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k-i}\\
&= 1 + k\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \qquad \text{(réindexation de la somme dans le sens inverse)}\\
&= 1 + k\left(u_{k-1} + \ln(k-1)\right)\\
&= 1 + k(u_{k-1}) + k\ln(k-1)\\
&= 1 + k(u_{k-1}) + k\ln\left((k)(1 - \frac{1}{k})\right)\\
&= 1 + k(u_{k-1}) + k\ln(k) + k\ln(1 - \frac{1}{k})
\end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) est convergente, u_{k-1} est négligeable devant $\ln(k-1)$ lorsque k tend vers $+\infty$. De plus, un équivalent de $k\ln(1-\frac{1}{k})$ est -1 qui est lui-même négligeable devant $k\ln k$. On en déduit finalement,

$$\boxed{E(X_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} k\ln(k)}$$

Interprétation :

$$\boxed{\text{Pour } k \text{ assez grand, le nombre d'achats en moyenne pour compléter la collection est de l'ordre de } k\ln k}$$

II. B. Équivalent de $P(X_k = n)$ lorsque $n \to +\infty$

II.B.1 Le collectionneur ne peut pas obtenir k vignettes différentes en moins de k achats. Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \{1,\dots,k-1\}, \quad P(X_k = n) = 0}$$

II.B.2 Calculons $P(X_k = n)$ en dénombrant le nombre de cas favorables sur le nombre de cas total. Comme il y a eu n tirages, et qu'il existe k vignettes possibles, le nombre de cas total est k^n (on compte avec ordre).

Dénombrons le nombre de cas favorables : Numérotons les vignettes de 1 à k. Notons A_i la sous-partie de $\{1,\dots,n\}$ correspondant à tous les tirages où le collectionneur a obtenu la vignette numéro i. Supposons que le collectionneur parvienne au n-ième achat à compléter sa collection. Alors, Les A_i forment une partition en exactement k parties de $\{1,\dots,n\}$. Dans cette partition il existe un singleton particulier, celui lié au dernier tirage. Notons ℓ le numéro de la vignette du dernier tirage. Il existe k choix possible pour ℓ. Par ailleurs, Les $\{A_i\}_{i\neq\ell}$ forment une partition en $k-1$ parties d'un ensemble de $n-1$ éléments ; il existe exactement $S_{n-1,k-1}$ telles partitions possibles. Chacune de ces partitions est obtenu pour exactement $(k-1)!$ cas favorables : car à chaque A_i de la partition peut correspondre n'importe quel numéro de vignette autre que ℓ : pour A_1 on a $(k-1)$ choix (tous sauf ℓ), pour A_2 , on a $(k-2)$ choix (tous sauf ℓ et le premier choix), etc... On en déduit que le nombre de cas favorables est $k(k-1)!S_{n-1,k-1}$. On a finalement,

$$\boxed{P(X_k = n) = \frac{k(k-1)!S_{n-1,k-1}}{k^n}}$$

II.B.3 En utilisant le résultat de la question **I.D.4** : $S_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k^n}{k!}$, on en déduit

$$\begin{aligned}
P(X_k = n) &= \frac{k(k-1)!S_{n-1,k-1}}{k^n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k(k-1)!(k-1)^{n-1}}{k^n(k-1)!} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(k-1)^{n-1}}{k^{n-1}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X_k = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1}}$$