Corrigé DS 1 : septembre 2023

Exercice 1 1. (a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\cos(x+\frac{\pi}{2})}\\ &= \frac{\cos(x)}{-\sin(x)}\\ &= -\frac{1}{\tan(x)}\end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}\\ &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\\ &= \frac{1}{\tan(x)}\end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}\\ &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\\ &= \frac{1}{\tan(x)}\end{aligned}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}\tan(\pi-x) &= \frac{\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}\\ &= \frac{\sin(x)}{-\cos(x)}\\ &= -\tan(x)\end{aligned}$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\tan(\pi+x) = \frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}\\ &= \tan(x)\end{aligned}$$

(f) On a

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

d'où

$$\cos^2(x) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\cos^2(x) = \frac{21}{25}$$

or $\cos(x) < 0$ donc

$$\cos^2(x) = -\sqrt{\frac{21}{25}}$$

(g) On a

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

d'où

$$\sin^2(x) = 1 - \left(\frac{-1}{6}\right)^2$$

$$\sin^2(x) = \frac{35}{36}$$

or $\sin(x) < 0$ puisque $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} :\right]$ donc

$$\sin(x) = -\sqrt{\frac{35}{36}}$$

Exercice 2 Par lecture sur le cercle trigonométrique on trouve :

1. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\cos\left(\frac{19\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{19\pi}{2}\right) = -1$ et tan n'est pas définie.
3. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}2$, $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}2$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$
4.
$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

5. $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -1$
6. On a

$$\begin{aligned}\cos(\frac{3\pi}{12}) &= \cos(\frac{\pi}{4})\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\frac{3\pi}{12}) &= \sin(\frac{\pi}{4})\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

   et donc $\tan(\frac{3\pi}{12}) = 1$

Exercice 3

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La formule d'addition du cosinus donne $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$. On a donc $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, ce qui donne

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

(b) On a $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$ et, puisque $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, $\cos^(\frac{\pi}{8}) = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{4})}{2}$ d'après la question précédente.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\cos(\frac{\pi}{8}) &= \sqrt{\frac{1+\frac{2\sqrt{2}}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Le même raisonnement ($\frac{3\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\frac{3\pi}{8}) > 0$) montre que

$$\cos(3\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(c) On a $\sin(\frac{\pi}{8}) > 0$ et $\sin(\frac{3\pi}{8}) > 0$ donc $\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{8})}$ et $\sin(\frac{3\pi}{8}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{3\pi}{8})}$ ce qui donne $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2. Voir le TD.

3. On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$$

On admet que cette équation admet au plus trois solutions réelles

(a) On pose $x = \cos(\theta)$, ce qui revient à rechercher les solutions de cette équation sur $[-1;1]$.
On doit alors résoudre

$$8\cos(\theta)^3 - 6\cos(\theta) - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$$

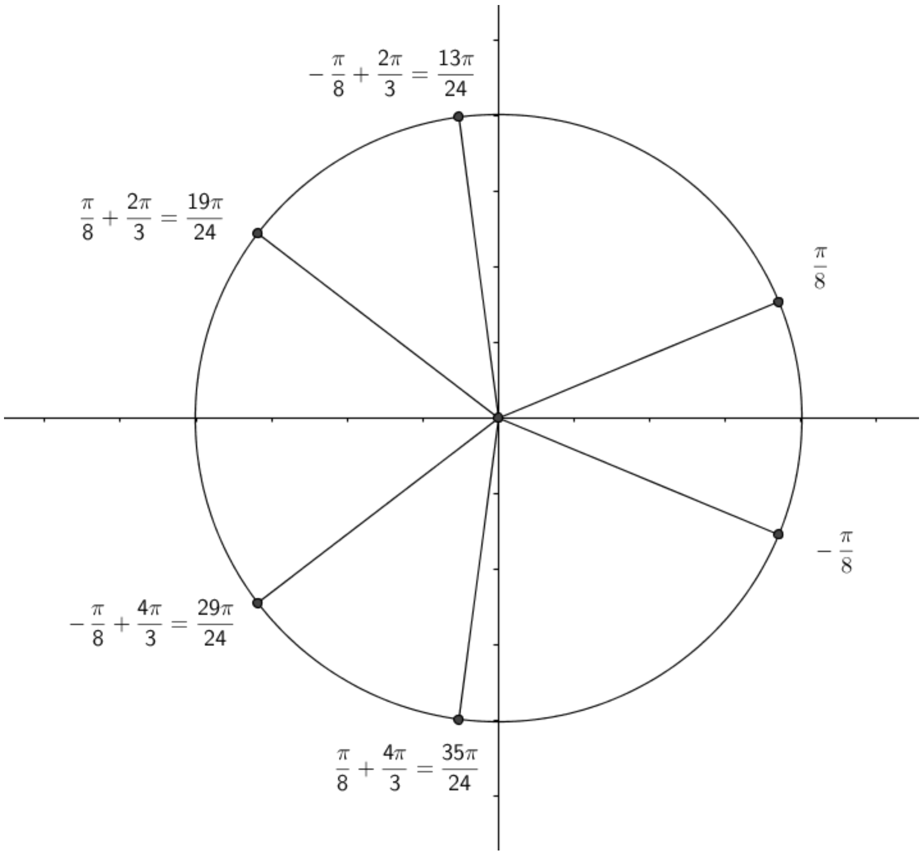
ce qui est éguivalent d'après la question précédente à

$$2\cos(3\theta) - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$$

ou encore à

$$\cos(3\theta) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 0$$

On en déduit les solutions de l'équation en θ : $3\theta = \frac{\pi}{8} + 2k\pi$ ou $3\theta = -\frac{pi}{8} + 2k\pi$. En se limitant aux solutions appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$, on trouve six valeurs possibles pour θ : $\frac{\pi}{8}$; $\frac{13\pi}{24}$; $\frac{19\pi}{24}$; $\frac{29\pi}{24}$ et $\frac{7\pi}{8}$.



Or on a posé $x=\cos(\theta)$ donc les cosinus de ces valeurs nous donne des solutions à l'équation de départ. Or parmi ces nombres, certains ont le même cosinus, ce qui ne donne que 3 valeurs de cosinus possibles : $\cos(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(\frac{13\pi}{24})$, et $\cos(\frac{35\pi}{24})$. Ces trois valeurs sont solutions de l'équation de départ et on a admis qu'il y avait au plus trois solutions. On a donc trouvé l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\cos\left(\frac{13\pi}{24}\right);\cos\left(\frac{35\pi}{24}\right)\right\}$$

Remarque : On pourrait expliciter ces solutions en utilisant la formule d'addition pour trouver la valeur exacte de $\cos\left(\frac{13\pi}{24}\right)$ et $\cos\left(\frac{35\pi}{24}\right)$.

Exercice 4 Correction effectuée en classe