

Corrige DS 2 : novembre 2023

Calculatrice interdite.

Le soin et la rédaction sont notés sur 4 points.

Exercice 1. 6 points.

Résoudre sur \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $\mathcal{S} = \{2 - i; -2 + i\}$
2. $\mathcal{S} = \{3i; 3 - i\}$
3. $\mathcal{S} = \{5 - 2i; -4 + 3i\}$
4. $\mathcal{S} = \{1, j, j^2\}$
5. $\mathcal{S} = \{2; 3i; 4 - i\}$

Exercice 2. 6 points.

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 2 \cos(x)$

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + x \sin(x)\}$$

2. $y'' + y' + y = 5 \sin(3x)$

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto C_1 e^{-\frac{x}{2}} \left(\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) - \frac{40}{73} \sin(3x) - \frac{15}{73} \cos(3x)\}$$

3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{x^2}{2} e^{-x} + \lambda_1 x e^{-x} + \lambda_2 e^{-x}; \lambda_1 \in \mathbb{R}; \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

4. $y'' - y = 2e^x$

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + x e^x; \lambda_1 \in \mathbb{R}; \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

5. $y'' + 3y' + y = e^{4x}$

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda_1 e^{(\frac{-3-\sqrt{5}}{2})x} + \lambda_2 e^{(\frac{-3+\sqrt{5}}{2})x} + \frac{1}{29} e^{4x}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3. 6 points.

1. -1 est racine réelle En notant $R(z)$ le polynôme de départ on a, après calculs :

$$R(z) = (z + 1)(z^3 - 5z^2 + (9 + 5i)z - (10 + 10i))$$

2. P admet $2i$ pour racine imaginaire pûre. Après factorisation on trouve :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 - (5 - 2i)z + (5 - 5i))$$

3. On résout l'équation de degré 2 :

$$z^2 - (5 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$$

et on trouve finalement :

$$\mathcal{S} = \{-1; 2i; 3 - i; 2 - i\}$$