Corrigé DM 1 : Bilan de compétences
Exercice 1.

Notation : On notera $x \rightarrow 0^+$ pour dire que x tend vers 0 par valeurs positives.

1. (a) La fonction f est décroissante sur tout son intervalle de définition. Sa dérivée est donc négative. La seule courbe pouvant représenter f' est donc $\mathcal{C}$.
- (b) La courbe Γ est donc la courbe représentative de F . On voit que le point $(1; 1)$ appartient à Γ . On a donc $F(1) = 1$.
2. (a) On a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.
- (b) On sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$$

- (c) La fonction inverse et la fonction $\ln$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$ donc leur différence f est aussi dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{-1-x}{x^2} \end{aligned}$$

- (d) Etudions le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$. Le dénominateur est strictement positif pour tout $x \in]0; +\infty[$ et $-1-x$ est strictement négatif sur $]0; +\infty[$. On a donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur son ensemble de définition. Puisqu'on a déjà déterminé les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f , on peut maintenant dresser son tableau de variations.

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$	$-\infty$

3. (a) Montrons que H est dérivable sur $]0; +\infty[$ et a pour dérivée f . H est somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ donc l'est aussi et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} H'(x) &= 1 - \ln(x) - \frac{x-1}{x} \\ &= 1 - \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} - \ln(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

H est donc une primitive de f .

- (b) D'après ce qui précède, F et H sont deux primitives de f . De plus

$$\begin{aligned} H(1) &= 1 - (1-1) \times \ln(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Puisque $F(1) = 1$ (d'après la question 1 (b)), F et H sont deux primitives qui prennent la même valeur en 1, elles sont donc égales. On a donc pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$F(x) = x - (x-1) \ln(x)$$

(c) On a

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t)dt &= [F(t)]_1^x \\ &= F(x) - F(1) \\ &= x - (x-1)\ln(x) - 1\end{aligned}$$

Exercice 2. 1. L'équation $2x^2 + 3x - 2 = 0$ est une équation de degré deux de discriminant $9 + 16 = 25$ donc admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-3-5}{4} \\ &= -2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-3+5}{4} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Le coefficient du terme de degré 2, est positif donc on sait que la fonction polynômiale $x \mapsto 2x^2 + 3x - 2$ est positive « à l'extérieur des racines ».

On a donc

$$\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$$

2. Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$	-5	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$	-	-	0	+
$x + 5$	-	0	+	+
$\frac{2x-3}{x+5}$	+	-	0	+

On en déduit

$$\mathcal{S} =]-\infty; -5[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$$

3. Le signe de notre polynôme est le même que celui du polynôme du second degré $x^2 - x - 6$. Ce dernier a pour discriminant $1 + 24 = 25$ et a donc deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1-\sqrt{25}}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1+\sqrt{25}}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathcal{S} = [-2; 3]$$

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x-2} \leq \frac{3x+1}{2x-4} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} - \frac{3x+1}{2x-4} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-2-3x-1}{2x-4} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x-3}{2x-4} \leq 0 \end{aligned}$$

et on peut maintenant effectuer un tableau de signes

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$-x-3$	+	0	-	-
$2x-4$	-	-	0	+
$\frac{-x-3}{2x-4}$	-	0	+	-

et on trouve

$$\mathcal{S} =]-\infty; -3] \cup]2; +\infty[$$