DM 9 Corrigé

Exercice 1. 1. La série est alternée et $\left|\frac{(-1)^k}{k+1}\right| = \frac{1}{k+1}$ et la suite $\left(\frac{1}{k+1}\right)_k$ tend en décroissant vers 0 donc d'après le CSSA, la série converge.

2. On procède par récurrence.
$*$ Pour $n = 1$. Soit $t > -1$. On a $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ et $\frac{(-1)^{-1}(0)!}{(1+t)^1} = \frac{1}{1+t}$. Donc l'égalité est vraie au rang 1.
$*$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'égalité soit vraie au rang n. On la dérive, pour $t > -1$:
$$f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(-n)}{(1+t)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}.$$
On en déduit que l'égalité est vraie au rang $n+1$.
$*$ Par récurrence, on a $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } t > -1, \text{ on a } f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}}$.

3. Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I un intervalle contenant a alors pour tout $x \in I$, on a :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

4. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > -1$, la formule de Taylor avec reste intégral :
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$
ou encore
$$\ln(1+x) = \ln(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+0)^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{(-1)^n(n)!}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$
Lorsque $x = 1$, on obtient :
$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0,1]$, on a déjà $0 \leq \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \leq (1-t)^n$. En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$ à bornes croissantes, on a :
$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt \leq \int_0^1 (1-t)^n\,dt$$
et après calcul des deux intégrales encadrantes :
$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt \leq \frac{1}{n+1}.$$
Or $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ donc par encadrement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt = 0}$.

6. Puisque $(-1)^n$ est une suite bornée, on a d'après la question précédente :
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt = 0$$
et comme $\ln(2)$ est constante, on en déduit d'après 3. :
$$\ln(2) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
et via le changement d'indice $j = k+1$, on trouve $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right) = \ln(2)}$.

Exercice 2. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note A_n l'événement « la poule pond un oeuf de calibre A à l'instant n », B_n l'événement « la poule pond un oeuf de calibre B à l'instant n »et C_n l'évenement « la poule pond un oeuf de calibre C à l'instant n », la famille (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\ &= P(B_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(B_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(B_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) \\ &= P(C_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(C_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(C_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{aligned}$$

2. En posant

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

on a $X_{n+1} = UX_n$

3. $U = \frac{1}{4}J + \frac{1}{4}I_3$. Or $J^0 = I_3$ et pour tout $n \geq 1$, $J^n = 3^{n-1}J$ et I_3 et J commutent donc

$$\begin{aligned} U^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}J\right)^k \left(\frac{1}{4}I\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} J\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right) J\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)J\right) \end{aligned}$$

4.

$$X_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)J\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots$$

Exercice 3.

Partie I. Convergence de la série.

1. D'après le critère de Riemann, la série converge puisque $2 > 1$

Partie II. Intégrales de Wallis.

2. On a directement l'intégrale d'une constante : $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déjà, puisque $\cos^{2n}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, comme on intégre à bornes croissantes, on a $I_n \geq 0$.
   Supposons que $I_n = 0$. Comme $t \longmapsto \cos^{2n}(t)$ est positive et continue, cela signifie que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos^{2n}(t) = 0$. Mais ceci est absurde car par exemple $\cos^{2n}(0) = 1 \neq 0$. Par l'absurde, on en déduit que $\boxed{I_n > 0}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(t)\cos(t)\,dt.$$
   On pose $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2n-1}(t)$. On a $u(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = -(2n-1)\cos^{2n-2}(t)\sin(t)$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc par intégration par parties, on en déduit que :
$$\begin{aligned} I_n &= \left[\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)\sin^2(t)\,dt \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)\left(1-\cos^2(t)\right)\,dt \\ &= (2n-1)\left(I_{n-1} - I_n\right) \qquad \text{linéarité de } \int \end{aligned}$$
   En repassant I_n à gauche, on obtient :
$$2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$$
   et donc $\boxed{I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.
   $*$ Pour $n = 0$, on a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et de l'autre côté :
$$\frac{(0)!}{2^0(0!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$
   Ainsi $P(0)$ est vraie.
   $*$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. On a d'après la question précédente :
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} I_n \\ &= \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{d'après } P(n) \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$
   Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
   $*$ Par récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}}$.

Partie III. Une suite d'intégrales annexe.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite définie par des intégrales suivante :
$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt.$$

6. On a :
$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{2^3 \times 3}.$$
   Ainsi $\boxed{J_0 = \frac{\pi^3}{24}}$.

7. On pose $u'(t) = \cos^{2n-1}(t)\sin(t)$ et $v(t) = t$. On a $u(t) = \frac{-1}{2n}\cos^{2n}(t)$ et $v'(t) = 1$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\,dt &= \left[\frac{-t}{2n}\cos^{2n}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2n}I_n.\end{aligned}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité et puisque $1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$, on a :

$$J_{n-1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n-2}(t)\left(1 - \cos^2(t)\right)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin(t)\cos^{2n-2}(t)\sin(t)\,dt.$$

En posant $u'(t) = \cos^{2n-2}(t)\sin(t)$ et $v(t) = t^2\sin(t)$, on trouve $u(t) = \frac{-1}{2n-1}\cos^{2n-1}(t)$ et $v'(t) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t)$. Les fonctions u et v étant $\mathcal{C}^1$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}J_{n-1} - J_n &= \left[t^2\sin(t)\frac{-1}{2n-1}\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}(t)\left(2t\sin(t) + t^2\cos(t)\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2n-1}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}(t)t\sin(t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(t)t^2\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}I_n + J_n\right)\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{J_{n-1} - J_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}I_n + J_n\right)}$.

Partie IV. Comparaison des suites (I_n) et (J_n).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \dfrac{J_n}{I_n}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{J_{n-1}}{I_n} - K_n &= \frac{J_{n-1} - J_n}{I_n} \\ &= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{J_n}{I_n}\right).\end{aligned}$$

On a obtenu $\boxed{\dfrac{J_{n-1}}{I_n} - K_n = \dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{1}{n} + K_n\right)}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant $I_n = \dfrac{2n-1}{2n}I_{n-1}$ dans la question précédente :

$$\frac{(2n)J_{n-1}}{(2n-1)I_{n-1}} - K_n = \frac{1}{(2n-1)n} + \frac{1}{2n-1}K_n.$$

Donc

$$\frac{2n}{2n-1}K_{n-1} - \frac{2n}{2n-1}K_n = \frac{1}{(2n-1)n}.$$

En multipliant par $\frac{2n-1}{2n}$, il vient $\boxed{K_{n-1} - K_n = \frac{1}{2n^2}}$.

11. La fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc son graphe est au-dessus de sa corde joignant 0 à $\frac{\pi}{2}$. Cette dernière a pour équation

$$y = \frac{2}{\pi}t.$$

Et par concavité, on a $y \leq \sin(t)$. Cela signifie que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ ou encore $\boxed{t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)}$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$ et puisque la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $t^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)$ puis en multipliant par $\cos^{2n}(t) \geq 0$, on a :

$$t^2\cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t).$$

Et enfin en intégrant à bornes croissantes, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{2n}(t)\, dt.$$

Cela signifie que

$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^{2n}(t)\, dt = \frac{\pi^2}{4} \left(I_n - I_{n+1}\right).$$

Et en remplaçant I_{n+1} :

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} I_n = \frac{2n+1}{2n+2} I_n,$$

on a

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} I_n.$$

On en déduit que

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2n+2} I_n = \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}.$$

Et puisque $K_n = \frac{J_n}{I_n}$, il suffit de diviser l'inégalité précédente par $I_n > 0$ pour obtenir :

$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)}.$$

13. La question précédente permet d'affirmer que $\lim K_n = 0$ par théorème d'encadrement. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, en sommant la relation de Q17 on a :

$$\sum_{k=1}^{n} K_{k-1} - K_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2}.$$

Par télescopage, on obtient :

$$\frac{1}{2} S_n = K_0 - K_n.$$

Et comme $\lim K_n = 0$, on en déduit que $\lim \frac{1}{2} S_n = K_0$ ie $\lim S_n = 2K_0$. Or

$$K_0 = \frac{J_0}{I_0} = \frac{\pi^3}{24} \times \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{12}.$$

On en déduit que $\boxed{\lim S_n = \frac{\pi^2}{6}}$.