Corrigé DM modélisation : janvier 2024

Adapté d'un sujet de modélisation-CCP filière TSI.

Partie 1. *Cas où f s'annule (excitation dite "finie")*

1. La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ donc, d'après le théorème du cours, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} mu'' + \mu u' + ku = f(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur $[0;+\infty[$

2. Sur l'intervalle $I = [\tau, +\infty[$ u est solution de l'équation différentielle homogène

$$mu''(t) + \mu u'(t) + ku(t) = 0$$

dont l'équation caractéristique est

$$mr^2 + \mu r + k = 0$$

équation polynomiale de degré deux de discriminant

$$\Delta = \mu^2 - 4mk$$

La condition $\frac{\mu}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$ implique que $\Delta < 0$ et l'équation caractéristique admet donc deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.
La solution u de l'équation sur $[\tau; +\infty[$ est donc de la forme

$$u(t) = e^{\alpha t}\left(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)\right)$$

où α, β, λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.

On peut exprimer α et β en fonction de μ, k, et m en explicitant r_1 et r_2

$$r_1 = \frac{-\mu + i\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}$$

et

$$r_2 = \frac{-\mu - i\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}$$

D'où

$$\alpha = \frac{-\mu}{2m}$$

et on peut prendre

$$\beta = \frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}$$

(la choix de $\beta = -\frac{\sqrt{4mk-\mu^2}}{2m}$ aurait aussi été correct)

3. Soit $x \in \mathbb{R}+$.
On a

$$-1 \leq \cos(\beta x) \leq 1$$

donc, puisque

$$e^{\alpha x} > 0$$

on a

$$-e^{\alpha x} \leq e^{\alpha x}\cos(\beta x) \leq e^{\alpha t}$$

Or $\alpha < 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\alpha x} = 0$$

Le théorème des gendarmes affirme alors que

$$\lim_{x\to+\infty}\cos(x)e^{\alpha x}=0$$

Le même raisonnement pour sinus s'applique et on peut conclure que u tend vers 0 en $+\infty$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}+$,

$$u'(x)=\alpha e^{\alpha x}(\lambda_1\cos(\beta x)+\lambda_2\sin(\beta x))+\beta e^{\alpha x}(-\lambda_1\sin(\beta x)+\lambda_2\cos(\beta x))$$

Tous les termes de la somme étant de la forme $\sin(x)e^{\alpha x}$ et $\cos(x)e^{\alpha x}$ on peut conlure comme ci dessus que leur limite en $+\infty$ est nulle et donc que u' tend vers 0 en $+\infty$.

Partie 2. *Cas d'une excitation sinusoïdale*

1. En reprenant les notation de la partie précédente on a

$$\mathcal{S}_H=\{t\mapsto e^{\alpha t}\left(\lambda_1\cos(\beta t)+\lambda_2\sin(\beta t)\right),\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}$$

2. Déja remarquons que $i\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique car la partie réelle des deux solutions, $\frac{-\mu}{2m}$, est non nulle ($\mu>0$). On peut donc chercher une solution particulière $\underline{y}_p$ sous la forme

$$\underline{y}_p(x)=Ce^{i\omega x}$$

avec C une constante à déterminer.
On a alors pour tout $x\in[0;+\infty[$,

$$\underline{y}_p'(x)=i\omega Ce^{i\omega x}$$

et

$$\underline{y}_p''(x)=-\omega^2Ce^{i\omega x}$$

$$m\underline{y}_p''(x)+\mu\underline{y}_p'(x)+k\underline{y}_p(x)=(-m\omega^2+i\mu\omega+k)Ce^{i\omega Cx}$$

$\underline{y}_p$ est solution si et seulement si

$$(-m\omega^2+i\mu\omega+k)C=f_0$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{aligned}C&=\frac{f_0}{-m\omega^2+k+i\mu\omega}\\&=f_0\frac{(k-m\omega^2)-i\mu\omega}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}\end{aligned}$$

On a donc pour tout $x\in[0;+\infty[$,

$$\underline{y}_p(x)=f_0\frac{k-m\omega^2-i\mu\omega}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}e^{i\omega x}$$

3. La partie imaginaire de $\underline{y}_p$ est solution réelle de l'équation avec second membre $\sin(\omega x)$. Déterminons donc la partie imaginiare de $\underline{y}_p$.

$$\underline{y}_p(x)\quad=\quad f_0\frac{k-m\omega^2-i\mu\omega}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}\left(\cos(\omega x)+i\sin(\omega x)\right)$$

La partie réelle de $\underline{y}_p(x)$ est donc

$$f_0\frac{k-m\omega^2}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}\cos(\omega x)+f_0\frac{\mu\omega}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}\sin(\omega x)$$

et la partie imaginaire est

$$f_0\frac{-\mu\omega}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}\cos(\omega x)+f_0\frac{k-m\omega^2}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}\sin(\omega x)$$

4. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = A\cos(x - \varphi)$$
avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
On peut utiliser ce résultat avec
$$a = f_0 \frac{-\mu\omega}{(k-m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}$$
et
$$b = f_0 \frac{k-m\omega^2}{(k-m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}$$
et, après simplifications, on trouve
$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + (k-m\omega^2)^2}}$$
$$\cos(\varphi) = \frac{-\mu\omega}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + (k-m\omega^2)^2}}$$
$$\sin(\varphi) = \frac{k-m\omega^2}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + (k-m\omega^2)^2}}$$

Partie 3

1. L'équation caractéristique
$$r^2 + r + 1 = 0$$
admet pour solutions
$$r_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
et
$$r_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
On a donc
$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$
Or 5 est solution particulière donc
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto 5 + e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

2. Si, pour tout $x \in [0; +\infty[$,
$$u(x) = 5 + e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$
alors $u(0) = 5 + \lambda_1$. La condition $u(0) = 0$ implique donc $\lambda_1 = -5$.
Pour tout $x \in [0; +\infty[$,
$$\dot{u}(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda_2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$
d'où
$$\dot{u}(0) = -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2$$
donc la condition $\dot{u}(0) = -1$ implique $-\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 = -1$ et donc $\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 = -1 + \frac{1}{2}\lambda_1$. On a donc
$$\lambda_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(-1 - \frac{5}{2})$$
c'est-à-dire
$$\lambda_2 = -\frac{7\sqrt{3}}{3}$$
Conclusion : pour tout $x \in [0; +\infty[$,
$$u(x) = 5 + e^{-\frac{1}{2}x}\left(-5\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{7\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$