DS supplémentaire : vendredi 29 novembre 2024

- ❀ Durée : 1h
- ❀ Les calculatrices sont interdites
- ❀ Le soin, la rigueur et la rédaction constituent une part importante du barème.
- ❀ Introduire toutes les variables utilisées.
- ❀ Conclure chaque question en encadrant ou soulignant vos résultats.

Exercice 1. *Cours.*
Voir cours ! Ces questions auraient du être réussi par tous les élèves.

Exercice 2. *Autour de la fonction* arctan.

I. Etude d'une fonction.

Soit f la fonction définie par
$$f : x \longmapsto \arctan(x) - \arctan(3x).$$

1. Rappeler les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ puis donner les valeurs de $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

   Commentaire : La plus réussie des questions, même si quelques copies se trompent et donnent des mauvaises valeurs ou comportent des erreurs de simplifications de fractions.

   On a $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}}$, $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$ d'où par quotient $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ et $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}}$.

2. Dresser le tableau de variations complet de f.

   Commentaire : Certains oublient le u' de la dérivée de $\arctan(u)$. Pire, certains se trompent en donnant la dérivée d'arctangente. Certains auraient pu avoir tout bon mais oublient les parenthèses autour du $3x$ pour le $(3x)^2$. Trop d'étudiants qui donnent la bonne dérivée ne pensent pas à mettre au même dénominateur pour étudier le signe de $f'(x)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+9x^2} \\ &= \frac{1+9x^2-3(1+x^2)}{(1+x^2)(1+9x^2)} \\ &= \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)(1+9x^2)}. \end{aligned}$$

Or $(1+x^2)(1+9x^2) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc :

$$f'(x) > 0 \iff -2+6x^2 > 0 \iff x^2 > \frac{1}{3} \iff x > \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad x < -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

De plus d'après la question 1 :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

et de même :

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) - \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

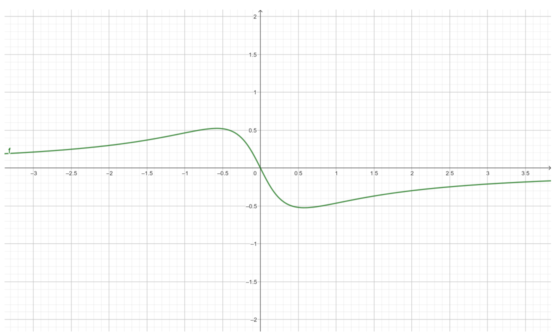
Enfin les limites comme somme de limites :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	0

3. Représenter l'allure du graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



II. Calcul d'une somme.

5. Montrer, à l'aide des formules d'addition de cos et sin, que pour tous $a, b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, si $a-b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}. \qquad (1)$$

Commentaire : Questions très bien traitées dans presque toutes les copies. Le travail porte ces fruits, même longtemps après !

Soit a, b comme dans l'énoncé. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} &= \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}-\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1+\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\
&= \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} \\
&= \tan(a-b)
\end{aligned}$$

D'où la formule demandée.

6. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy \neq -1$ et tels que $(x) - \arctan(y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (cette condition n'était pas précisé dans l'énoncé de cette question (mais était implicite d'après la question précédente). En utilisant (1) avec $a = \arctan(x)$ et $b = \arctan(y)$, montrer que :

$$\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right).$$

En posant $a = \arctan(x)$ et $b = \arctan(y)$, on a $\tan(a) = x$ et $\tan(b) = y$. On applique arctan des deux côtés de l'égalité (1) :

$$\arctan(\tan(a-b)) = \arctan\left(\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}\right)$$

ou encore, puisque $a-b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (ce qui implique que $\arctan(\tan(a-b)) = a-b$)

$$a - b = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$

d'où $\boxed{\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)}$.

7. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

<u>Commentaire</u> : Etonnamment les calculs ici n'ont pas toujours été bien menés. Il convient d'appliquer le résultat précédent en le citant et en vérifiant l'hypothèse de validité.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On applique l'égalité précédente car $\frac{k}{k+1} \times \frac{k-1}{k} \neq -1$:

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) &= \arctan\left(\frac{\frac{k}{k+1}-\frac{k-1}{k}}{1+\frac{k}{k+1}\frac{k-1}{k}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\frac{k^2-(k-1)(k+1)}{k(k+1)}}{\frac{k+1+k-1}{k+1}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\frac{1}{k}}{\frac{2k}{1}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit $\boxed{\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)}$.

8. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$. Puis déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Commentaire : Peu d'élèves sont allées jusqu'au bout de la question. Pour trouver la valeur d'une somme téléscopique qui ne se présente pas exactement comme dans le cours, il convient d'expliciter autant de termes que nécessaire pour voir ce qu'il reste à la fin...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a en utilisant la question précédente puis la linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) && \text{posant } \ell = k-1 \text{ dans la 2e}\\
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(0)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)}$ et par composée des limites $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \frac{\pi}{4}}$.

Exercice 3. *Une fonction complexe.*
On s'intéresse à la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ z & \longmapsto & z + \frac{1}{z} \end{array}$$

1. (a) Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, établir le lien entre $f\left(\frac{1}{z}\right)$ et $f(z)$.

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On a $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + z$ donc $\boxed{f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)}$.

(b) L'application f est-elle injective ?

Commentaire : Trop peu d'élèves pensent à faire le lien avec la question précédente qui pourtant était au coeur de la justification de la non injectivité de f. Une seule élève a penser à dire que $z \neq \frac{1}{z}$ ssi $z \neq 1$.

D'après la question précédente, il suffit de prendre $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $\frac{1}{z} \neq z$ (il fallait donc prendre $z \neq 1$) et dans ce cas, on aura deux éléments différents qui s'envoient sur la même image. Prenons $z = 2$, on a $\frac{1}{2} \neq 2$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

2. (a) Soit $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Justifier que l'équation $z^2 - \omega z + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *On ne demande pas d'expliciter les solutions.*

Commentaire : Tout polynôme non constant sur $\mathbb{C}$ admet au moints une racine !! En vérifiant de plus que 0 n'était pas solution, on avait le résultats sans se fatiguer au calcul !!

Cette équation est une équation de degré 2 et d'après le cours elle admet toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}$. Or cette solution ne peut être 0. En effet 0 ne satisfait pas l'équation : si $z = 0$ alors $z^2 - \omega z + 1 = 1 \neq 0$. Donc $\boxed{z^2 - \omega z + 1 = 0 \text{ admet au moins une solution dans } \mathbb{C}\backslash\{0\}}$.

(b) L'application f est-elle surjective ?

Commentaire : Trop peu d'élèves pensent à faire le lien avec la question précédente ! Prenez un peu de recul.

Soit $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. L'équation $f(z) = \omega$ équivaut (en multipliant par z) à l'équation $z^2 - \omega z + 1 = 0$. Or d'après la question précédente cette dernière équation admet toujours au moins une solution z dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Cette solution est précisément un antécédent de ω par f. Ainsi $\boxed{f \text{ est surjective vers } \mathbb{C}\backslash\{0\}}$.