TD 14 : Géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Exercice 1.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ m \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2-m \\ 1 \\ m-2 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ils colinéaires ? orthogonaux ?

Exercice 2.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs. Montrer que $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Trouver un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0}$.

Exercice 3.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ trois vecteurs.

1. Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\overrightarrow{E}$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 4.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{3}} + \frac{\vec{v}}{\sqrt{2}}$.

1. Déterminer $\cos(\vec{u},\vec{v})$ et $\sin(\vec{u},\vec{v})$.
2. Justifier que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires puis calculer $\vec{u}\cdot\vec{w}$.

Exercice 5.
Soient $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{k})$, $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ et $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$.

Démontrer que $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ est une base orthonormée . Cette base est-elle directe ?

Exercice 6.
On considère les points $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -6; -1)$; $C(2; 2; 2)$ et $L(0; 1; -3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les points A, B et C. Le point L appartient-il à ce plan ?
2. Soit P le plan d'équation $x + y - 3z + 2 = 0$ et P' le plan dirigé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ et contenant le point O. Déterminer l'intersection de P et P'.
3. Ecrire une équation de la sphère de centre L et de rayon 5.
4. Déterminer l'intersection de S avec le plan P.
5. Déterminer l'intersection de S avec la droite (OJ) où $J(0, 1, 0)$

Exercice 7.
Soit d la droite passant par les points $A(1,-2,-1)$ et $B(3,-5,-2)$.

1. Donner un système d'équations paramétriques de d.
2. Soit d' la droite d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

   Démontrer que les droite d et d' ne sont pas coplanaires.

3. $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{P}$ contient la droite d.
   (b) Démontrer que $\mathcal{P}$ coupe la droite d' en un point C que vous déterminerez.
4. Δ est la droite passant par C et dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   (a) Démontrer que Δ et d' sont coplanaires et orthogonales.
   (b) Démontrer que Δ coupe perpendiculairement d en un point E dont vous déterminez les coordonnées.

Exercice 8.
Soit D la droite d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 5 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

1. Le point $A(0,2,0)$ appartient-il à D ?
2. Trouver une équation du plan $\mathcal{P}$ contenant D et passant par A.
3. Soit D'

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 3x - 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

   D et D' sont-elles parallèles ?
4. Déterminer le projeté orthogonal de $E(1,2,3)$ sur D'.

Exercice 9.
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Montrer les formules suivantes :

1. Formule du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

2. Formule de Jacobi

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$$

3. Identité de Langrange

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$$

Exercice 10.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x - 4y + 1 = 0$ et $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $6x - 2y - 3z + 2 = 0$.
Déterminer l'ensemble des points équidistants de P et P'.

Exercice 11.
On considère la sphère $\mathcal{S}$ d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z = 11$$

1. Donner le centre et le rayon de cette sphère.
2. Vérifier que $A(5,-3,5)$ appartient à $\mathcal{S}$.
3. Donner les coodonnées du point A' diamétralement opposé à A.
4. Donner les équations cartésiennes des plans tangents à $\mathcal{S}$ en A et en A'.