TD 6 : Nombres complexes

Exercice 1.
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$(2+9i)(5-4i) \quad ; \quad \frac{6+10i}{2i} \quad ; \quad \overline{(2-5i)(7+3i)} \quad ; \quad \frac{7i+2}{3-5i} \quad ; \quad \frac{(1+i)(6-2i)}{(2+4i)(5+10i)} \quad ; \quad (2-i)(3+2i)(6+7i)\,;$$
$$(3-4i)^2-(7+7i)^3 \quad ; \quad \frac{i+5}{(6-2i)^2} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{1-7i}{4+3i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i} \quad ; \quad (1+i\sqrt{3})^5$$

Exercice 2.
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$4-4i \quad ; \quad -ie^{i\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad 6i \;;\; -8i \;;\; \frac{i+1}{4i\sqrt{3}+4} \;;\; \frac{1+\sqrt{3}}{(1+i)^2} \;;\; 3ie^{i\frac{\pi}{6}} \;;\; \frac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}+i)^2} \;;\; \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i} \;;\; -2(\sqrt{15}-\sqrt{5}i)$$

Exercice 3.

1. Donner la forme algébrique de $z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z_3=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
2. Donner la forme trigonométrique de $z_4=3+i\sqrt{3}$, $z_5=-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$
3. Utiliser la forme appropriée pour calculer :
   (a) $(z_4)^{2000}$
   (b) z_1+z_2
   (c) $z_3\times z_4$

Exercice 4.
Donner le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1=1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$
$$z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$$
$$z_3=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$

Exercice 5.
On souhaite déterminer grâce à deux méthodes différentes les racines carrées du nombre complexes $Z=1+i$.

1. Ecrire Z sous forme trigonométrique et en déduire les racines carrées de Z.
2. Utiliser la « méthode algébrique »pour trouver les racines carrées (écrites sous forme algébrique) de Z.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

Exercice 6.

1. Simplifier pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$ les sommes suivantes :

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) \quad ; \quad C_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$$
$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) \quad ; \quad A_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$$

2. Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x)+\sin(5x)=0$$

Exercice 7.
Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :
$1 \;;\; i \;;\; 3+4i \;;\; 8-6i \;;\; 7+24i$

Exercice 8.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i$
2. $z^3 = -16\bar{z}^7$
3. $z^2 + 3iz + 6 = 0$
4. $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0$
5. $z^4 = 28 - 96i$
6. $z^2 + z + 1 = 0$
7. $z^4 + (3-i)z - 3i = 0$
8. $z^3 = 8i$
9. $z^6 = 1$

12. $z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$
Indication : une des solutions est imaginaire pûre.

Exercice 9.
Soit θ un réel appartenant à $]0;\theta[$. Simplifier la somme $S = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

Exercice 10.
Soient $A(-2)$ et $B(i)$. On associe à tout point $M(z)$ tel que $z \neq i$ le point $M'(z')$ où $z' = \frac{z+2}{z-i}$

1. Placer les points A et B
2. Interpréter géométriquement le module et l'argument de z'
3. Dans chaque cas, déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que
   (a) $z' \in \mathbb{R}_+^*$
   (b) $\arg(z') = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   (c) M' est sur le cercle de centre O et de rayon 1

Exercice 11.

1. Factoriser la somme $e^{ip} + e^{iq}$ et la différence $e^{ip} - e^{iq}$ par $e^{i\frac{p+q}{2}}$
2. En déduire les quatre formules de factorisation vues en cours de trigonométrie (factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$,$\cos(p) - \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$ et $\sin(p) - \sin(q)$)

Exercice 12.
Linéariser :

1. $\cos^3(x)$
2. $\cos(2x)\sin^3(x)$
3. $\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)$
4. $\cos(x)\sin^6(x)$
5. $\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)$
6. $\sin^3(x)\cos^2(x)$
7. $\cos^3(x)\sin^2(x)$
8. $\cos^3(2x)\sin^2(3x)$

Exercice 13.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Exercice 14.
Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$: $\sin(4x)$, $\cos(4x)$, $\sin(5x)$

Exercice 15.
Soient a et b deux réels et $Z = (2a - b - i(a+b))(-a - i(a+b))$. A quelles conditions sur a et b le nombre complexe Z est-il réel ?

Exercice 16.
Soient A, B, C et D les points d'affixes $1+i$, $1-2i$, $2-2i$ et $2+i$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 17.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$, sachant que l'une des racines est réelle. Montrer que les points ayant pour affixes les solutions de cette équation forment un triangle équilatéral rectangle.