TD ... : Applications

Exercice 1.
Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ qui a tout complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ associe $f(z) = \frac{2z-i}{iz+1}$

1. Déterminer l'image de 1 et les éventuels antécédents de 1 par f.
2. Déterminer l'image de $2i$ et les éventuels antécédents de $2i$ par f.
3. Déterminer l'image de 0 et les éventuels antécédents de $2i$ par 0.
4. Déterminer l'image de $1+i$ et les éventuels antécédents de $1+i$ par 0.
5. Déterminer l'image de $-3i$ et les éventuels antécédents de $-3i$ par 0.
6. Le complexe $-2i$ possède-t-il une image par f ? Un antécédent par f ?
7. Montrer que tout complexe z' différent de $-2i$ possède un unique antécedent par f.

Exercice 2.
Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $g_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$
2. $g_2 : \begin{cases} [1,5] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$
3. $g_3 : \begin{cases} [2,5] \to [2,10] \\ x \mapsto 2x \end{cases}$
4. $g_4 : \begin{cases} [1,5] \to [2,10] \\ x \mapsto 2x \end{cases}$

Exercice 3.
Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} [0;2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{ix} \end{cases}$
5. $f_4 : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{cases}$
6. $f_5 : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{cases}$
7. $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+2} \end{cases}$

Exercice 4.
Déterminer pour chaque fonction l'ensemble de départ et d'arrivée pour que la fonction soit une bijection puis déterminer sa fonction réciproque :

1. $f : x \mapsto \sqrt{3x-2}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{x}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$
5. $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$
6. $f : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$
7. $f : x \mapsto x^2+1$

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{1}{e^x+1}$

1. Montrer que f est une bijection
2. Justifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculer son nombre dérivée en $\frac{1}{2}$

Exercice 6.
Soit $f : x \mapsto x^2+4x+1$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-2;+\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et donner la bijection réciproque.
2. Déterminer $f([-3;0])$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(-4)$, $f^{-1}([0;1[)$.
3. On note ϕ la fonction réciproque associé à la restriction de f à $[-2;+\infty[$. ϕ est-elle dérivable en -3 ?

Exercice 7.
On considère l'application f de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer les limites de f en $2+$ et $2-$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{4\})$.
5. L'application f est-elle surjective ?
6. Soit $I =]2, +\infty[$. Prouver que f_I est une bijection de I dans J où J est un intervalle à préciser.
7. Déterminer l'application réciproque $f_I^{-1} : J \to I$.

Exercice 8.
On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$

1. Montrer que f n'est ni injective ni surjective.
2. Déterminer $f^{-1}(\{(3, 2)\})$.
3. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 9.
On considère l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

1. Donner les valeurs de $f(n)$ pour n allant de 1 à 8
2. Montrer que f est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.
   Indication : Pour k fixé, on pourra chercher les antécédents de k par f.

Exercice 10.
Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f(n) = n + 1$$

et

$$g(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ n - 1 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de ces applications. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 11.
On considère des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$

1. Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
2. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.
3. Montrer que ($g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives) $\Leftrightarrow$ (f, g et h sont bijectives)

Exercice 12.
Calculer

1. $\arcsin(\sin(\frac{8\pi}{9}))$	2. $\arcsin(\cos(\frac{10\pi}{9}))$	3. $\arcsin(\sin(\frac{10\pi}{9}))$
4. $\sin(\arccos(\frac{1}{3}))$	5. $\sin(\arccos(-\frac{1}{4}))$	6. $\tan(\arccos(-\frac{1}{3}))$

Exercice 13.
Montrer que pour tout $x \in [-1; 1]$,

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 14.
Résoudre les équations suivantes à l'aide des fonctions trigonométriques réciproques :

1. $\cos(x) = \frac{1}{3}$
2. $\sin(x) = \frac{2}{3}$

3. $\cos(3x) = \frac{1}{5}$
4. $\sin(2x) = \frac{1}{4}$

Exercice 15.
Démontrer les propositions suivantes :

1. pour tout $x \in [-1;1]$,
$$\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$
2. Pour tout $x \in]-1;1[$,
$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
3. pour tout $x \in [-1;1] \setminus \{0\}$,
$$\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Exercice 16.
1. A l'aide de la fonction arctan, déterminer les arguments des nombres complexes $2+i$, $7+i$ et $1+i$
2. Montrer la relation $2(2+i)^2 = (1+i)\times(7+i)$
3. En déduire la formule $2\arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(\frac{1}{7}) = \frac{\pi}{4}$
4. Monter la relation $\frac{(5+i)^4}{239+i} = 2(1+i)$
5. En déduire une autre formule concernant $\frac{\pi}{4}$

Exercice 17.
Etudier les variations et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$
$$g(x) = (x-1)^2\arctan(x)$$
$$h(x) = \sqrt{1-x^2}e^{\arcsin(x)}$$
$$k(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$$