TD ... : Equations différentielles linéaires

Exercice 1.
Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' - y = 3$
3. $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}+$
4. $y'' - \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}+$
5. $\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = 0$
6. $y'' - 2y' + 3y = 7$
7. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$
8. $y'' + 4y' + 3y = e^x$
9. $y' - 3y = 1$
10. $2y' - 3y = 2\cos(2x)$
11. $y'' + y' - 2y = 1$ avec les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$
12. $\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \theta = \sin^4(t)$
13. $y'' + 2y' + y = \cos^3(x)$
14. $y'' + y = \cos(2t)$
15. $y'' + \omega^2 y = \sin(2x)$ où ω est un réel positif.
16. $y'' - y = \cos(x)$
17. $y'' + y' + y = 8e^x \cos^3(x)$
18. $f'' + f = \cos(x) + \sin(5x)$

Exercice 2.
Soit H la fonction de Heavyside, c'est-à-dire la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(t) : \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Réprésenter la fonction H
2. Sur quels intervalles la fonction H est-elle continue ?
3. On se place sur $]-\infty, 0]$.
   Déterminer et représenter la solution sur $]-\infty, 0]$ de l'équation (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$ pour
   (a) $(E) : y'' + 4y = 4H(t)$ (réponse à un échelon sans amortissement)
   (b) $(E) : y'' + 2y' + 4y = 4H(t)$ (réponse à un échelon faiblement amorti)
   (c) $(E) : y'' + 4y' + 4y = 4H(t)$ (réponse à un échelon, amortissement critique)
   (d) $(E) : y'' + 5y' + 4y = 4H(t)$ (réponse à un échelon fortement amorti)
4. Même question sur $[0, +\infty[$

Exercice 3. *Décharge d'un condensateur.*
Un condensateur de capacité C et de charge q est placé en série avec une résistance R. La tension initiale à ses bornes vaut E et on admet que cette tension u est régie par le système de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} RC\frac{du}{dt} + u = 0 \\ u(0) = E \end{cases}$$

1. Résoudre ce système de Cauchy et étudier les fonctions u et q au cours du temps (limites, variations).
2. On pose $\tau = RC$.
   (a) A quel pourcentage de la tensions maximale le condensateur est-il chargé après une durée de charge égale à τ ? à 3τ ? à 5τ ?
   (b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de u à l'instant 0. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe représentative de u avec l'axe des abscisses.

Exercice 4.
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt} + 5\theta = \cos(t) \\ \theta(0) = 1 \\ \frac{d\theta}{dt}_{|t=0} = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' + 9y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^x \\ y(1) = 0 \\ \dot{y}(1) = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

Exercice 5.
On considère le système différentiel suivant :

$$(E)\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + \cos(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + \sin(t) \end{cases}$$

1. Si x et y sont solutions de E, montrer que $z(t) = x(t) + iy(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire $(\tilde{E})$ du premier ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
2. Résoudre $(\tilde{E})$ puis en déduire les solutions de (E)