TD ... : Logique

Partie 1. *Quantificateurs.*

Exercice 1.
Traduire en utilisant des quantificateurs chacune des propositions suivantes.

1. Tous les entiers naturels sont positifs ou nuls.
2. Il existe au moins un nombre réel dont le carré est 8.
3. La somme de deux entiers quelconques est un entier.
4. Un carré est toujours positif.
5. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ possède au moins une solution réelle.

Exercice 2.
Ecrire la négation de chacune des propositions de l'exercice 1.
Donner la valeur de vérité de toutes les propositions.

Exercice 3.
Dire si les proposition suivantes sont vraies ou fausses puis écrire la négation de chacune d'elles et indiquer si cette négation est vraie ou fausse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 \geq x$
2. $\exists x \in \mathbb{R}\ ,\ (\forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0)$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R},\ xy \neq 0)$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 0)$
5. $\forall y \in \mathbb{R},\ (\exists x \in \mathbb{R},\ x + y = 0)$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists p \in \mathbb{N},\ 3 < n + p)$
7. $\exists p \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N},\ 3 < n + p)$

Exercice 4.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Traduire avec des quantificateurs :

1. f s'annule
2. f est la fonction nulle
3. f est croissante
4. f admet un maximum
5. f est bornée

Partie 2. *Raisonnement par récurrence.*

Exercice 5.
Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 6.
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$2^{n-1} \leq n!$$

et que pour tout $n \geq 4$,

$$2^n \leq n!$$

Exercice 7.
Soit u_n une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2$. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = (u_0)^{2^n}$$

Exercice 8.
Montrer la formule du binome de Newton par récurrence sur n.

Exercice 9.
Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 2$, 2^n divise $5^{2^{n-2}} - 1$

Exercice 10.
La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Partie 3. *Ensembles.*

Exercice 11.
Soient A et B deux ensembles. Montrer les équivalences suivantes

1. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
2. $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$
3. $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$

Exercice 12.
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $(2 < 3)$ ET (2 divise 4)
2. $(2 < 3)$ ET (2 divise 5)
3. $(2 < 3)$ OU (2 divise 5)
4. $(2 < 3)$ ET non(2 divise 5)

Exercice 13.
Soit n un entier naturel quelconque. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ? Donner leur contraposée et leur négation.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n > 5) \Rightarrow (n > 3)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n > 5) \Rightarrow (n \geq 6)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n > 5) \Rightarrow (n > 6)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n < 1) \Rightarrow$ (2 divise n)
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n < 1) \Rightarrow$ (n divise 2)

Exercice 14.
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Déterminer :

1. $(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right)$
2. $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$

Exercice 15.
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Si $A \cup B = A \cup C$, peut-on en déduire que $B = C$?
2. Si $A \cap B = A \cap C$, peut-on en déduire que $B = C$?
3. Si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, peut-on en déduire que $B = C$?

Justifiez vos réponses.