TD 1 : Logique

Exercice 1.
Traduire en utilisant des quantificateurs chacune des propositions suivantes. Ecrire ensuite la négation de chacune d'elles. Enfin, donner la valeur de vérité de toutes les propositions.

1. Tous les entiers naturels sont positifs ou nuls.
2. Il existe au moins un nombre réel dont le carré est 8.
3. La somme de deux entiers quelconques est un entier.
4. Un carré est toujours positif.
5. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ possède au moins une solution réelle.

Exercice 2.
Ecrire la négation de chacune des propositions suivantes et indiquer la valeur de vérité de chacune des propositions.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 \geq x$
2. $\exists x \in \mathbb{R}\ ,\ (\forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0)$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R},\ xy \neq 0)$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 0)$
5. $\forall y \in \mathbb{R},\ (\exists x \in \mathbb{R},\ x + y = 0)$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists p \in \mathbb{N},\ 3 < n + p)$
7. $\exists p \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N},\ 3 < n + p)$

Exercice 3.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Traduire avec des quantificateurs :

1. f s'annule
2. f est la fonction nulle
3. f est croissante
4. f admet un maximum
5. f est bornée
6. f est constante

Exercice 4.
Les proposition suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 = 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 = 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 1 = 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 3 = 0$

Exercice 5.
Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction majorée lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$.

1. Comment traduire graphiquement le fait que f soit une fonction majorée ?
2. Écrire au moyen de quantificateurs l'assertion « f est une fonction majorée », puis l'assertion « f n'est pas une fonction majorée ».
3. On ne suppose pas nécessairement f majorée. Quelle est la valeur de vérité de l'assertion « pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ » ?

Exercice 6.
Peut-on compléter les phrases suivantes par le symbole $\Rightarrow$? Le symbole $\Leftarrow$? Les réponses devront être rigoureusement justifiées.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 1) \quad \ldots \quad (e^x \geq 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq y) \quad \ldots \quad (x^2 \geq y^2)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x = y) \quad \ldots \quad (\cos(x) = \cos(y))$
4. $\forall m \in \mathbb{N}, (m \text{ pair }) \quad \ldots \quad (m \text{ multiple de } 6)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \quad \ldots \quad (\cos(x) = \cos(y))$

Exercice 7.
Pour chacune des implications suivantes, formuler sa réciproque et sa contraposée. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions obtenues :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ pair } \Rightarrow n^2 \text{ pair })$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (3|n) \Rightarrow (6|n)$
3. $(2|3) \Rightarrow (2 \geq 3)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, ((x-1)(x-2) = 0) \Rightarrow (x = 1)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (xy = 0) \Rightarrow ((x = 0) \text{ ou } (y = 0))$
6. Pour tout A, B et M points du plan, si M est le milieu de $[AB]$ aors $MA = MB$

Exercice 8.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse donnée.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad m > n.$
2. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q}, (x < z \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{Q}, x < y < z)).$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > 3) \Longrightarrow (n > 6).$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x < 2) \Longrightarrow (x^2 < 4).$

5. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad ((x < -2) \text{ et } (x > 2)) \Longrightarrow x^2 < 4$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n a_k^2 = 0 \Rightarrow (\forall k \in \{1, \dots n\}, \quad a_k = 0)$.
7. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n, \sum_{k=1}^n a_k^2 = 0 \Rightarrow (\forall k \in \{1, \dots n\}, a_k = 0)$.

Exercice 9.
Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

Indication : utiliser un raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 10.
Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(m+n) = f(m) + f(n)$$

Exercice 11.
Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 12.
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$2^{n-1} \leq n!$$

et que pour tout $n \geq 4$,

$$2^n \leq n!$$

Exercice 13.
Soit u_n une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2$. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = (u_0)^{2^n}$$

Exercice 14.
Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 2$, 2^n divise $5^{2^{n-2}} - 1$

Exercice 15. *Inégalité de Bernoulli.*
Soit $a \in [-1; +\infty[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$

Exercice 16.
La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$