TD intermède : Sommes et produits de nombres

Exercice 1.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}(3k+5)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3$
3. $\displaystyle\sum_{k=3}^{11}(2\times 2^k-1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=10}^{92}a^k$ où $a\in\mathbb{R}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3k+3^k$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+2k$
7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$ où $\alpha\in]0;\pi[$ (Astuce : utiliser l'identité $\cos(x)=\frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$)
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)$ où $\alpha\in]0;\pi[$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}$
11. $\displaystyle\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 6k-k^2\geq 8}}k$
12. $\displaystyle\sum_{\substack{3\leq k\leq 10\\ k\text{ pair}}}k$

Exercice 2.
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Exercice 3.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\quad;\quad\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\quad;\quad\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}\quad;\quad\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}$$
2. Les formules sont-elles toujours valables pour $n=0$?

Exercice 4.
Calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}6^i\quad;\quad\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}6^i\quad;\quad\sum_{i=0}^{n}8^i5^{n-i}\quad;\quad\sum_{i=0}^{n}3^{2i+1}7^{3i+1}\quad;\quad\sum_{j=0}^{n+1}(j+3)$$

Exercice 5.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2$ et $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3$.

1. Après avoir développé $(k+1)^3$, calculer T_n.
2. En effectuant le changement d'indice $j=k+1$ dans T_n, trouver une autre expression de T_n.
3. En utilisant l'égalité des deux expressions de T_n, exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 6.
Soit $n\geq 2$.
Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Trouver deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}$ puis calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 7.
En utilisant une méthode similaire à celle de l'exercice précédent, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 8.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Développer les expressions suivantes :

$$(1+z)^3 \quad (1-2z)^4 \quad (1+iz)^5$$

$$(z+1)^9 \quad (z-1)^9 \quad (z+i)^6 \quad (iz-1)^5$$