TD 4 : Sommes et produits de nombres

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}(3k+5)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i}$
4. $\displaystyle\sum_{k=3}^{11}(2\times 2^k-1)$
5. $\displaystyle\sum_{k=10}^{92} a^k$ où $a\in\mathbb{R}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k+3^k$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}+2k$
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi)$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(2^k+(-2)^k\right)$;
11. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 3^k$;
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$;
13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n^k$;
14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$;
15. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$
16. $\displaystyle\sum_{p=1}^{2n}\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{2p+2}\right)$
17. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}$
18. $\displaystyle\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 6k-k^2\geq 8}} k$
19. $\displaystyle\sum_{\substack{3\leq k\leq 10\\ k \text{ pair}}} k$

Exercice 2.

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$ où $\alpha\in]0;\pi[$ (Astuce : utiliser l'identité $\cos(x)=\frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$)
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)$ où $\alpha\in]0;\pi[$

Exercice 3.
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Exercice 4.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ ;\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ ;\ \sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}\ ;\ \sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}$$
2. Les formules sont-elles toujours valables pour $n=0$?

Exercice 5.
Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}6^i\ ;\ \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}6^i\ ;\ \sum_{i=0}^{n}8^i5^{n-i}\ ;\ \sum_{i=0}^{n}3^{2i+1}7^{3i+1}\ ;\ \sum_{j=0}^{n+1}(j+3)$$

Exercice 6.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2$ et $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3$.

1. Après avoir développé $(k+1)^3$, calculer T_n.
2. En effectuant le changement d'indice $j=k+1$ dans T_n, trouver une autre expression de T_n.
3. En utilisant l'égalité des deux expressions de T_n, exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 7.
Soit $n\geq 2$.
Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Trouver deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}$ puis calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 8.
En utilisant une méthode similaire à celle de l'exercice précédent, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Développer les expressions suivantes :

$$(1+z)^3 \quad (1-2z)^4 \quad (1+iz)^5$$

$$(z+1)^9 \quad (z-1)^9 \quad (z+i)^6 \quad (iz-1)^5$$

Exercice 10.
Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Exercice 11.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $A = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} 3$
2. $B = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} 2^{2i-j}$
3. $C = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \max(i,j)$

Exercice 12.

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.
2. Quel est le coefficient du terme en x^3y^5 dans le développement de l'expression $(2x-y)^8$?
3. Calculer les sommes suivantes, où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$,
   (a) $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
   (b) $B = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x 2^k$
   (c) $C = \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^{n-k}$
   (d) $D = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$
   (e) $E = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^k$
   (f) $F = \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n}{k-2} n 3^{n+2k}$
   (g) $G = \sum_{k=3}^{n+1} \binom{n}{k-2}$