TD ... : Systèmes linéaires

Exercice 1.
Déterminer si les deux systèmes suivants sont équivalents

$$(S)\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 4x+12y=4 \end{cases}$$

et

$$(S')\begin{cases} 2x+5y=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Exercice 2.
Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+2y+0z=0 \\ -2x+y+z=2 \\ -x-y+2z=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2y-z=1 \\ -2x-4y+3z=-1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 4x+6y+8z=6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ -2x+4y-6z=-2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \\ x+y=1 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+3y+2z+t=-2 \\ 2x+7y+3z=-5 \\ 3x+8y+7z+11t=13 \\ -2x-8y-2z+6t=18 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2z+t=1 \\ y-z-2t=0 \end{cases}$

Exercice 3.
On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ $y''-y'-6y=10xe^{3x}$
On admet que cette équation a une solution particulière de la forme $x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{3x}$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$
Résoudre le système de Cauchy

$$\begin{cases} y''-y'-6y=10xe^{3x} \\ y(0)=\frac{2}{5} \\ y'(0)=\frac{4}{5} \end{cases}$$

Exercice 4.
Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On note (S) le système :

$$\begin{cases} x+2y-z=a \\ -2x-3y+3z=b \\ x+y-2z=c \end{cases}$$

1. A quelle condition portant sur a, b et c le système (S) admet des solutions ?
2. Résoudre (S) dans $\mathbb{R}^3$ lorsque $(a,b,c)=(0,0,1)$
3. Résoudre (S) dans $\mathbb{R}^3$ lorsque $(a,b,c)=(1,-2,1)$

Exercice 5.
Soit $m\in\mathbb{R}$ et

$$M=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & m \end{array}\right)$$

Pour quelles valeurs de m le système dont M est la matrice augmentée est-il compatible ?

Exercice 6.
Discuter suivant les valeurs du nombre réel a les solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & a^2 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 7.
Déterminer la matrice échelonnée réduite par lignes équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.
Démontrer qu'il existe une unique fonction polynomiale du second degré prenant la valeur 8 en -1, -2 en 1 et -4 en 3 puis déterminer m tel que le système dont la matrice augmentée est écrite ci-dessous soit compatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & m \end{array}\right)$$

Résoudre le système pour cette ou ces valeurs de m.

Exercice 9.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} mx + 2y + 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \end{array}\right.$$

et du plan $\mathcal{P}$ d'équation $(m+1)x + my + (m-1)z = m - 1$.

Exercice 10.
Etant donnés trois points du plan A_1, A_2 et A_3 déterminer un triangle $M_1M_2M_3$ tel que A_1 soit le milieu de $[M_2M_3]$, A_2 le milieu de $[M_1M_3]$ et A_3 le milieu de $[M_1M_2]$

Exercice 11.
Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ix + (3+2i)y & = & 1 + 2i \\ (1+i)x - 2y & = & 3 - i \end{array}\right.$$