

TD ... : Dénombrement**Exercice 1.**

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément 5 boules dans l'urne.
 - (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - (b) Combien de tirages donnent deux boules blanches et trois boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
 - (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - (b) Combien de tirages donnent deux boules blanches et trois boules noires ?
3. On tire successivement 5 boules de l'urne avec remise.
 - (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - (b) Combien de tirages donnent deux boules blanches et trois boules noires ?

Exercice 2.

Dans un lycée de 1200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument de musique et 453 ne font ni sport ni musique. Déterminer le nombre d'élèves qui sont à la fois sportifs et musiciens.

Exercice 3.

Nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments ($n \geq p$), de surjections d'un ensemble à $n + 1$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Exercice 4.

Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur (trèfle, carreau, coeur, pique).
Une main est constituée de 8 cartes.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as au moins ?
3. Combien contiennent au moins un coeur ou au moins une dame ?
4. Combien de mains ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

Exercice 5. Digicode.

Un digicode est situé à l'entrée d'un immeuble. Pour ouvrir il faut composer un code formé de 3 chiffres distincts à choisir parmi les chiffres de 1 à 9 puis de deux lettres à choisir parmi A, B, C et D (les lettres ne sont pas elles nécessairement distinctes).

1. Déterminer le nombre de codes possibles.
2. Déterminer le nombre de codes possibles ayant trois chiffres impairs et deux lettres distinctes.
3. Je suis sûr que les chiffres sont 1, 2 et 4 (je ne me souviens plus du tout de l'ordre) et qu'il y a au moins un A, combien de codes faut-il essayer ?
4. Je suis sûr que le premier chiffre est un 1, que les chiffres sont dans l'ordre croissant et que les lettres sont E puis D. Combien de codes faut-il essayer ?

Exercice 6.

Une entreprise comprend 35 employés dont 16 femmes et 19 hommes. On élit le bureau directeur du comité d'entreprise, composé d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier. Les postes ne sont pas cumulables.

1. Quel est le nombre de bureaux possibles ?
2. Quel est le nombre de bureaux :
 - (a) où le poste de vice-président est occupé par une femme ?
 - (b) où le président et le trésorier sont des hommes ?
 - (c) où le président et le vice-président sont de sexes différents ?
3. Quel est le nombre de bureaux possibles, sachant que le président est un homme, le vice-président une femme, et que Monsieur Dupond refuse de siéger avec Madame Martin ?

Exercice 7.

une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes constitué de $n \times p$ cases dont certaines sont noircies et d'autres non.

- Dans cette question, on s'intéresse aux grilles à 6 lignes et 4 colonnes avec 4 cases noircies.
 - Combien de grilles peut-on former ?
 - Parmi ces grilles combien d'entre-elles ont :
 - Exactement deux coins noircis ?
 - Au moins un coin noirci ?
 - Exactement une case noircie par colonne ?
 - Exactement une case noircie par colonne et au plus une case noircie par ligne ?
- On s'intéresse maintenant aux grilles à n lignes et p colonnes avec k cases noircies (où k est un entier entre 1 et np)
 - Combien de grilles différentes peut-on former ?
 - Parmi ces grilles combien d'entre-elles ont :
 - au plus une case noircie par colonne ?
 - au plus une case noircie par colonne et au plus une case noircie par ligne ?

Exercice 8.

On dispose d'un dé octaédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 8. On lance le dé deux fois en notant à chaque fois le numéro obtenu. Un résultat est donc un couple $(x; y)$ où x est le numéro obtenu au premier lancer et y celui obtenu au second.

- Combien y a-t-il de résultats possibles en tout.
- Combien de résultats donnent une somme des deux numéros obtenus égale à 9.
- Combien de résultats donnent une somme des deux numéros obtenus égale à 8.
- Combien de résultats donnent une somme au moins égale à 4.

Exercice 9.

On peint les faces d'un cube dont l'arête mesure 4 cm. On découpe ensuite ce cube suivant des plans parallèles aux faces en petits cubes d'arête 1 cm.

- Faire une figure représentant le cube et les lignes de coupe.
- Quel est le nombre total de petits cubes obtenus ?
- Combien y a-t-il de petits cubes qui ont 3 faces colorées ?
- Combien y a-t-il de petits cubes qui ont exactement 2 faces colorées ?
- Combien y a-t-il de petits cubes qui ont exactement 1 face colorée ?
- Les petits cubes sont mis dans une urne et on extrait simultanément 8 petits cubes de l'urne.
 - Combien y a-t-il de possibilités en tout ?
 - Combien y a-t-il de possibilités où aucun petit cube n'est coloré ?
 - Combien y a-t-il de possibilités où tous les petits cubes ont au moins deux faces colorées ?

Exercice 10. Pile ou Face.

On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée avec laquelle on effectue des lancers successifs.

- On suppose dans cette question que l'on effectue 5 lancers consécutifs.
 - Combien y a-t-il de résultats possibles ?
 - Combien de résultats possibles comportent strictement plus de « Face » que de « Pile » ?
 - Combien de résultats possibles comportent strictement plus de « Pile » que de « Face » ?
- On suppose dans cette question que l'on effectue 4 lancers consécutifs.
 - Combien y a-t-il de résultats possibles ?
 - Combien de résultats possibles comportent strictement plus de « Face » que de « Pile » ?
 - Combien de résultats possibles comportent strictement plus de « Pile » que de « Face » ?
 - Combien de résultats possibles comportent autant de « Pile » que de « Face » ?
- On suppose dans cette question que l'on effectue n lancers successifs et que n est impair, $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
On note A l'ensemble des résultats possibles comportant strictement plus de « Face » que de « Pile » et B l'ensemble des résultats possibles comportant strictement plus de « Pile » que de « Face ».
 - Calculer $\text{Card}(A)$ et $\text{Card}(B)$.
 - En déduire la somme $\sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k}$
- On suppose dans cette question que l'on effectue n lancers successifs et que n est pair, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
 - Calculer le nombre de résultats contenant autant de « Pile » que de « Face ».
 - Calculer $\text{Card}(A)$ et $\text{Card}(B)$.
 - En déduire la somme $\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k}$