Activité : Fonctions hyperboliques

Exercice 1. *Etude des fonctions* ch *et* sh.

Définition (Cosinus hyperbolique)**.**

La fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch est la fonction défnie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Définition (Sinus hyperbolique)**.**

La fonction **sinus hyperbolique**, notée sh est la fonction défnie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Etudier la parité des fonctions ch et sh.
2. Calculer les fonctions dérivées de ces deux fonctions.
3. Dresser le tableau de variation de chacune d'elles.
4. Trouver les limites pour compléter le tableau de variations.
5. Trouver l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 à chacune des deux courbes et déterminer, pour chacune des fonctions, la position relative de la courbe et de sa tangente.
6. Tracer les courbes représentatives des deux fonctions.
7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions :
   (a) $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$
   (b) $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$
   (c) $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)$
   (d) $\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)$
8. Les fonctions sh et ch sont-elles des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?

Proposition (Relation fondamentale entre ch et sh)**.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

Exercice 2. *Tangente hyperbolique.*

Définition (Définition non exigible)**.**

On définit la fonction tangente hyperbolique en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Faire l'étude complète de cette fonction et trouver un ensemble de départ et d'arrivée pour la rendre bijective.

Exercice 3. *Suites récurrentes de fonction itérative hyperbolique.*

Soit u définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \mathrm{ch}(u_n) \end{cases}$$

1. Placer les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
2. Montrer que $]0;+\infty[$ est stable par ch. Que peut-on en déduire quant aux termes de la suite u ?
3. Montrer que u est croissante.
4. La fonction ch possède-t-elle un point fixe ?
5. Que peut-on en déduire quant au comportement asymptotique de u ?

Exercice 4. *Une somme télescopique.*
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que
$$\mathrm{th}((n+1)x) - \mathrm{th}(nx) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(nx)\,\mathrm{ch}((n+1)x)}$$
2. En déduire la valeur de
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{ch}(nx)\,\mathrm{ch}((n+1)x)}$$
3. Quel est le comportement asymptotique de $S_n(x)$ quand $n \to +\infty$?