Activité : Fonctions hyperboliques, Correction

Exercice 1. *Etude des fonctions* ch *et* sh.

Définition (Cosinus hyperbolique)**.**

La fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch est la fonction défnie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Définition (Sinus hyperbolique)**.**

La fonction **sinus hyperbolique**, notée sh est la fonction défnie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Etudier la parité des fonctions ch et sh.
   L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ch}(-x) & = & \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} \\ & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ & = & \operatorname{ch}(x) \end{array}$$

   et

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sh}(-x) & = & \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} \\ & = & -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ & = & -\operatorname{sh}(x) \end{array}$$

   La fonction ch est donc paire et la fonction sh impaire.

2. Calculer les fonctions dérivées de ces deux fonctions.
   Les fonctons ch et sh sont combinaisons linéaires d'expontentielles donc sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier dérivables.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sh}'(x) & = & \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\ \operatorname{sh}'(x) & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ & = & \operatorname{ch}(x) \end{array}$$

   On voit que la fonction sh est strictement croissante et on calcule que $\operatorname{sh}(0) = 0$. On peut donc remplir le tableau de variations de ch

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ch}'(x) & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ & = & \operatorname{sh}(x) \end{array}$$

3. Dresser le tableau de variation de chacune d'elles.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		∞
$\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$		$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Trouver les limites pour compléter le tableau de variations : fait à la question précédente

5. Notons T_0 la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe de la fonction sh :

$$T_0 : y = \text{sh}(0) + \text{sh}'(0)(x - 0)$$

$$T_0 : y = x$$

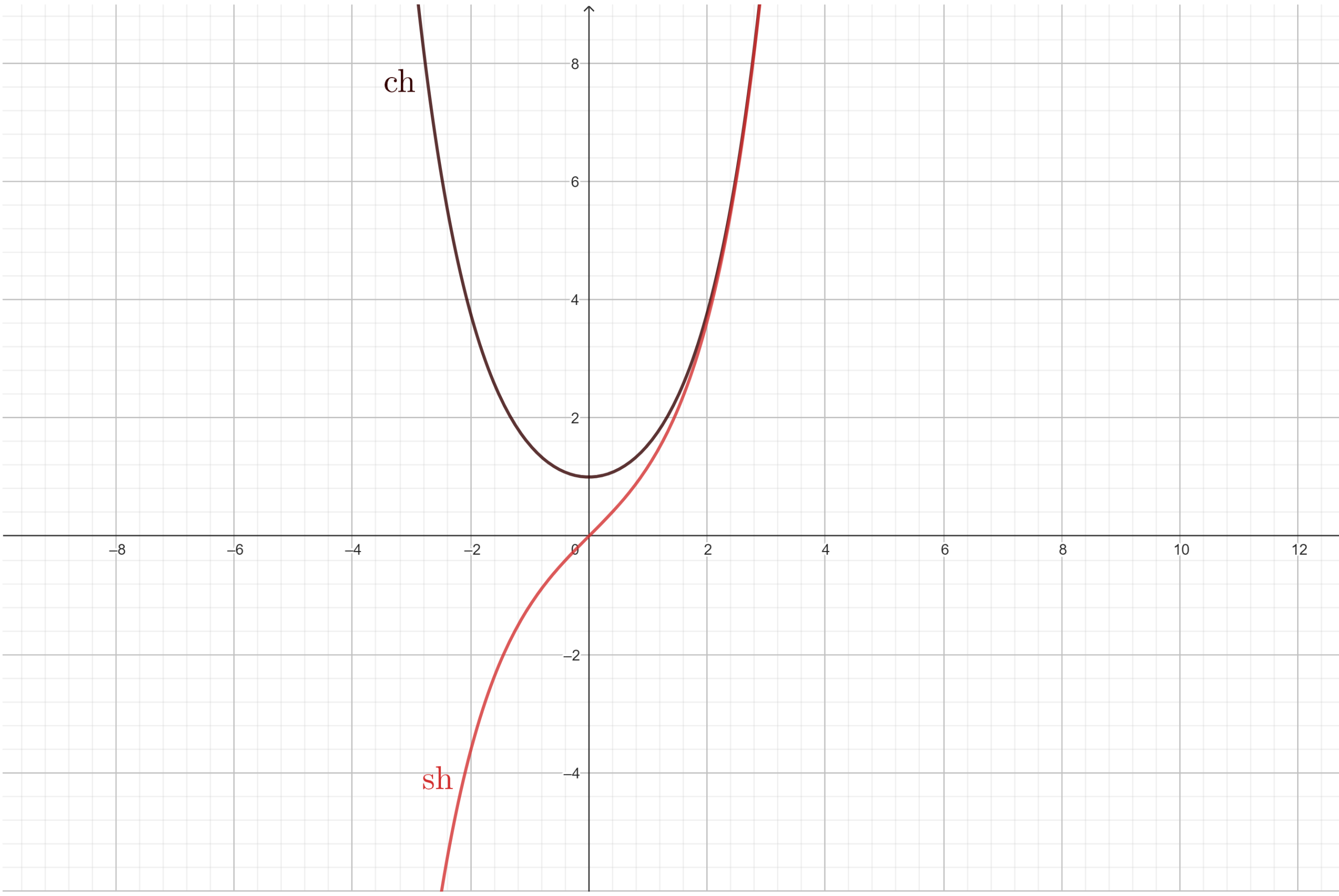
Notons $\varphi : x \mapsto \text{sh}(x) - x$. On a $\varphi'(x) = \text{ch}(x) - 1 \geq 0$ La fonction φ est donc croissante et s'annule en 0. On a donc $\varphi(x) \leq 0$ pour tout $x \leq 0$ et $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. La courbe de sh est donc en-dessous de sa tangente pour les points d'abscisses négatives et au dessus de sa tangente pour les points d'abscisses positives.
Notons T_1 la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe de la fonction ch :

$$T_0 : y = \text{ch}(0) + \text{ch}'(0)(x - 0)$$

$$T_0 : y = 1$$

1 étant le minimum de la fonction ch, la courbe de la fonction ch reste donc toujours au dessus de sa tangente en 0.

6. Tracer les courbes représentatives des deux fonctions.



7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions :

(a) $\text{ch}(x) + \text{sh}(x)$.

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) + \text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2e^x}{2} \\ &= e^x \end{aligned}$$

(b) $\text{ch}(x) - \text{sh}(x)$

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) + \text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2e^{-x}}{2} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

(c) $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)$

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(d) $\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)$

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\ &= \text{ch}(2x) \end{aligned}$$

8. Les fonctions sh et ch sont-elles des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?
   sh est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. D'après les limites indiquées dans tableau de variation $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. La fonction sh est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   La fonction ch est paire donc non injective. Ce n'est pas une bijection.

Proposition (Relation fondamentale entre ch et sh)**.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Exercice 2. *Tangente hyperbolique.*

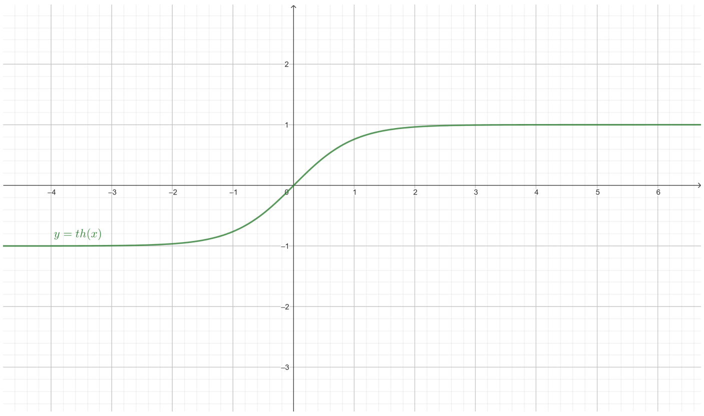
Définition (Définition non exigible)**.**

On définit la fonction tangente hyperbolique en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Faire l'étude complète de cette fonction et trouver un ensemble de départ et d'arrivée pour la rendre bijective.
th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}'(x) &= \frac{\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0 \\
&= \mathrm{th}(x) - 1
\end{aligned}$$

La fonction th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = 1$ donc th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$



Exercice 3. *Suites récurrentes de fonction itérative hyperbolique.*

Soit u définie par
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \mathrm{ch}(u_n) \end{cases}$$

1. Placer les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

2. Montrer que $]0;+\infty[$ est stable par ch. Que peut-on en déduire quant aux termes de la suite u ?
   Soit $x \in]0;+\infty[$. On a $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$ donc $\mathrm{ch}(x) > 0$. On a donc $]0;+\infty[$ stable par ch.
3. Montrer que u est croissante.
   La fonction itérative ch est croissante donc u est monotone. On a, pour tout $x \geq 0$, $\mathrm{ch}(x) > x$ (étude de fonction à faire) donc $u_1 \geq u_0$ et la suite u est donc croissante.
4. La fonction ch possède-t-elle un point fixe ? Non puisque, pour tout $x > 0, \mathrm{ch}(x) > x$
5. Que peut-on en déduire quant au comportement asymptotique de u ? La suite u est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, on a u convergente ou $\lim u = +\infty$. Puisque ch est continues, si u admettait une limite finie ce serait nécessairement un point fixe de ch. Or il n'y en a pas d'après la question précédente. D'où $\lim u = +\infty$

Exercice 4. *Une somme télescopique.*
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que
$$\mathrm{th}((n+1)x) - \mathrm{th}(nx) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(nx)\,\mathrm{ch}((n+1)x)}$$
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned}
\mathrm{th}\left((n+1)x\right) - \mathrm{th}(nx) &= \frac{e^{(n+1)x} - e^{-(n+1)x}}{e^{(n+1)x} + e^{-(n+1)x}} - \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \\
&= \frac{\left(e^{(n+1)x} - e^{-(n+1)x}\right)\left(e^{nx} + e^{-nx}\right) - \left(e^{nx} - e^{-nx}\right)\left(e^{(n+1)x} + e^{-(n+1)x}\right)}{4\,\mathrm{ch}\left((n+1)x\right)\mathrm{ch}(nx)} \\
&= \frac{e^{(n+1+n)x} + e^{x} - e^{-x} - e^{(-n-1-n)x} - e^{(n+n+1)x} - e^{-x} + e^{x} + e^{(-n-n-1)}}{4\,\mathrm{ch}\left((n+1)x\right)\mathrm{ch}(nx)} \\
&= \frac{2e^{x} - 2e^{-x}}{4\,\mathrm{ch}\left((n+1)x\right)\mathrm{ch}(nx)} \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}\left((n+1)x\right)\mathrm{ch}(nx)}
\end{aligned}$$
   D'où $\boxed{\mathrm{th}\left((n+1)x\right) - \mathrm{th}(nx) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}\left((n+1)x\right)\mathrm{ch}(nx)}}$.
2. En déduire la valeur de
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{ch}(nx)\,\mathrm{ch}((n+1)x)}$$
   On a :
$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{ch}(kx)\,\mathrm{ch}\left((k+1)x\right)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{th}\left((k+1)x\right) - \mathrm{th}(kx)\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} \left(\mathrm{th}\left((n+1)x\right) - 0\right)
\end{aligned}$$
   On en déduit que $\boxed{S_n(x) = \frac{\mathrm{th}\left((n+1)x\right)}{\mathrm{sh}(x)}}$.
3. Quel est le comportement asymptotique de $S_n(x)$ quand $n \to +\infty$?
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)x = +\infty$, on a par composée de limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{th}\left((n+1)x\right) = 1$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}}$.