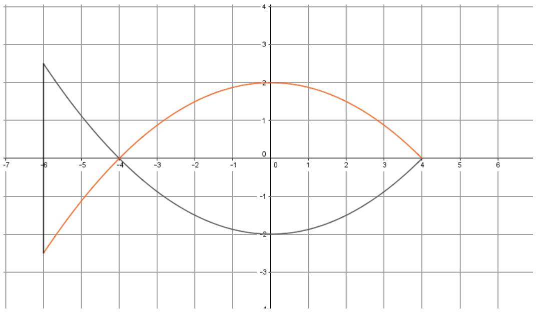
Chapitre 18 : Applications linéaires



Ce poisson n'est pas un poisson d'avril linéaire.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Définition

Définition 1 (Application linéaire entre deux espaces vectoriels)**.**

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application de E dans F. On dit que f est **linéaire** si

1. $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$

✍ **Exemple 1**
Si $a \in \mathbb{R}$, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ est linéaire.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \mapsto AX$ est linéaire.

Remarque :
Si f est linéaire, on a $f(0_E) = 0_F$.

Notation.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Proposition 1 (Caractérisation des applications linéaires)**.**

Une application $f : E \to F$ est linéaire **si et seulement si**

$$\forall (u,v) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

✍ **Exemple 2**
Si $a \in \mathbb{R}$, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ est linéaire.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \mapsto AX$ est linéaire.

✍ **Exemple 3**

1. L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x,y)) = (x+y, x-y)$ est une application linéaire.
2. L'application $\begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ est linéaire.
3. L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto f(2) \end{cases}$ est linéaire.

4. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(t)dt \end{cases}$ est linéaire
5. Pour $p, n \in \mathbb{N}$, $p < q$, l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \sum_{k=p}^{q} u_k \end{cases}$ est linéaire.
6. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, l'application $\begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto af'' + bf' + cf \end{cases}$ est linéaire.

Proposition 2 (Image directe et image réciproque d'un sev par une application linéaire)**.**

Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F.

1. Si H est un sous-espace vectoriel de E alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si G est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

✍ **Exemple 4**
On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f((x,y)) = (x, -y)$.
Montrer que f est linéaire puis déterminer $f(F)$ où $F = \text{vect}\{(1,1)\}$ et $f^{-1}(G)$ où $G = \{0\}$.
Même questions pour l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2x+y, 3y-y)$ et l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2x+y, 6x+2y)$

Définition 2 (Endomorphisme)**.**

On appelle **endomorphisme de** E une application linéaire de E dans E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

✍ **Exemple 5**
L'application $\text{id}_E : E \to E$, $x \mapsto x$ est un endomorphsime.

✍ **Exemple 6**
Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

✍ **Exemple 7**
Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto XP$ n'est pas un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

✍ **Exemple 8**
Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto X^2P'$ et $g : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto XP' - P$. Les applications f et g sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{K}_n[X]$?

II Opérations sur les applications linéaires

Proposition 3 (Combinaison linéaire d'applications linéaires)**.**

Soient E et F deux espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

Proposition 4 (Composée d'applications linéaires)**.**

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Proposition 5 (Règles de calcul)**.**

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

Si $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$ et $f \in \mathcal{F}(E,F)$

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

Si$f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = \lambda (g \circ f)$$

Définition 3 (Isomorphisme)**.**

Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.

Proposition 6 (Inverse d'une application linéaire bijective)**.**

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphsime alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Proposition 7 (Composée d'isomorphismes)**.**

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f un isomorphisme de E dans F et g un isomorphsime de F dans G. Alors $g \circ f$ et un isomorphisme de E dans G et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

III Endomorphismes

Proposition 8 (Remarque)**.**

$\mathcal{L}(E)$ est muni d'une loi de composition interne $\circ$:

1. qui n'est pas commutative
2. qui est associative
3. qui admet l'identité pour élément neutre : pour tout $f \in \mathcal{L}(E), f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$

Définition 4 (Groupe linéaire)**.**

L'ensemble des endomorphismes de E bijectifs est appelé **groupe linéaire** et noté $\mathcal{GL}(E)$.

Proposition 9 (inverse et composée d'endomorphsimes)**.**

1. Si $f \in \mathcal{GL}(E)$ alors $f^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$ et $(f^{-1})^{-1} = f$
2. Si f et $g \in \mathcal{GL}(E)$ alors $f \circ g \in \mathcal{GL}(E)$ et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Définition 5 (Puissances d'un endomorphsime)**.**

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ on peut définir $f^n = f \circ f \cdots \circ f$. On pose par convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.

✍ **Exemple 9**
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer $(f + \mathrm{id}_E)^2$ et $(f + g)^2$

IV Image et noyau

Définition 6 (Image)**.**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle **image de** f l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F; \exists x \in E, y = f(x)\}$$

✍ **Exemple 10**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y, 3x - y)$. Déterminer l'image de f.
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y, 4x + 2y)$. Déterminer l'image de g.

Définition 7 (Noyau)**.**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle **noyau de** f l'ensemble

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E; f(x) = 0_F\}$$

✍ **Exemple 11**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y, 3x - y)$. Déterminer le noyau de f.
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y, 4x + 2y)$. Déterminer le noyau de g.

✍ **Exemple 12**
Déterminer le noyau de $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$ puis le noyau de $g : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto XP$

Proposition 10 (CNS de surjectivité, injectivité à l'aide du noyau et de l'image)**.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.
2. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.

✎ **Exercice 1**
L'application $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$ est-elle injective ? surjective ?

Méthode 1 (Montrer qu'une application linéaire est injective)**.**

Pour montrer qu'une application linéaire f est injective on montre que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

✎ **Exercice 2**
Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est injective.

Proposition 11 (Image d'une famille génératrice par une application linéaire)**.**

L'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$: si $E = \text{vect}(e_1, \dots e_n)$ alors $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), \dots f(e_n))$.

Proposition 12 (Image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective)**.**

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective alors l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

Proposition 13 (Image d'une famille libre par une application linéaire injective)**.**

Si f est injective alors l'image par f d'une famille libre est une famille libre.

Proposition 14 (Conséquence : image d'une base par un isomorphisme)**.**

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective alors l'image par f d'une base de E est une base de F.

V Isomorphisme

Définition 8 (Rappel)**.**

On appelle **isomorphisme** de E sur F une application **linéaire bijective** de E dans F.

Théorème 1 (CNS d'isomorphsime)**.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre

1. f est un isomorphisme.
2. f transforme toute base de E en un base de F.
3. f transforme une base de E en un base de F.

Proposition 15 (Deux espaces vectoriels de dimension finis isomorphes ont la même dimension)**.**

Si deux espaces de dimension finie E et F. Si E et F sont isomorphes alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 16 (Application linéaire entre deux espaces de même dimension)**.**

Soient E et F deux espaces **de même dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors

$$\boxed{f \text{ est bijective si et seulement si } f \text{ est injective si et seulement si } f \text{ est surjective.}}$$

✍ **Exemple 13**
Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$ est un isomorphisme.

Remarque :
En particulier si E est de dimension finie un endomorphisme de E est un isomorphisme et seulement si il est injectif si et seulement si il est surjectif.

✍ **Exemple 14**
Ce n'est pas le cas en dimension infinie : l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$ est surjectif mais non injectif.

VI Modes de génération

Proposition 17 (Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.)**.**

Si E est de dim p et $\mathcal{B}$ une base de E et F de dimension n et $(v_1, \dots v_p)$ une famille de F il existe une unique $f : E \to F$ tel que $f(u_i) = v_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

✍ **Exemple 15**
Il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :
$f(1,0,0) = (1,0)$, $f(1,1,0) = (1,2)$ et $f(1,1,1) = (-1,2)$.

Exprimer $f(x,y,z)$ et déterminer noyau et image de f.

Théorème 2 (CNS d'isomorphie)**.**

Soient E et F deux espaces vectoriel de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 18 (Une application linéaire est uniquement déterminée par ses restrictions à deux supplémentaires)**.**

Si $E = E_1 \oplus E_2$, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

✍ **Exemple 16**
Si $E = E_1 \oplus E_2$ alors il existe une unique application linéaire $E \to E$ telle que $f(u) = u$ pour tout $u \in E_1$ et $f(u) = -u$ pour tout $u \in E_2$.

VII Rang

Définition 9 (Rang d'une application linéaire)**.**

On appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

On dit que f est **de rang fini** si son rang est fini.

Proposition 19 (CNS de surjectivité, injectivité)**.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie.
1. $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ avec égalité ssi f surjective
2. $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ avec égalité ssi f injective

Proposition 20 (Rang d'une composée)**.**

Soient E, F et G trois espaces vectoriels.
Soient $f \in \mathcal{L}(F,G)$ et $g \in \mathcal{L}(E,F)$ de rangs finis.

$$\mathrm{rg}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

Théorème 3 (Théorème du rang)**.**

Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f est de rang fini et

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u)$$

Méthode 2 (Trouver le rang d'une application linéaire)**.**

En dimension finie, pour trouver le rang de f il suffit de trouver la dimension de son noyau puis d'appliquer le theorème du rang

✍ **Exemple 17**

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_2, x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4) \end{cases}$. Déterminer le rang de f.

✍ **Exemple 18**

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P'' \end{cases}$. Déterminer le rang de f.

Remarque :
On retrouve que, si $\dim(E) = \dim(F)$, f bijective ssi f injective ssi f surjective.