Chapitre 2 : Nombres complexes

I L'ensemble des nombres complexes

I.1 Définition

Définition 1.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un ensemble contenant $\mathbb{R}$ et muni de deux opérations $+$ et $\times$ prolongeant les opérations existant sur $\mathbb{R}$ et conservant leurs propriétés.
Dans $\mathbb{C}$, l'équation $x^2 = -1$ possède deux solutions i et $-i$.
Par construction de $\mathbb{C}$, on a :
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un **unique** couple de réels $(a; b)$ tels que $z = a + ib$.

Exemple
$3 + 2i$, $-10i$, tous les nombres réels sont des nombres complexes ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Définition 2.

Si $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ est un nombre complexe, le réel a s'appelle la **partie réelle** de z et se note $\mathrm{Re}(z)$ et le réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z et se note $\mathrm{Im}(z)$.
L'écriture $a + ib$ s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe z.

Exercice 1
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes : $2(5 + 10i)$, $i(3i + 15)$, $-i(2 + 2i)$, $(12 + i)(i - 1)$, $(5 + 6i)(2 - 4i)$

Remarque :
Les nombres complexes ayant une partie réelle nulle ($3i$ par exemple) sont appelés **imaginaires purs**.
On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres complexes imaginaire purs.

Proposition 1.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la **même partie réelle** et la **même partie imaginaire**.
En particulier, un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Exercice 2
Montrer que l'équation $z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i = 0$ admet une solution réelle z_1

Proposition 2 ($\mathbb{R}$-Linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire)**.**

Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes et λ un nombre **réel**, on a :
1. $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$
2. $\mathrm{Re}(\lambda z_1) = \lambda\,\mathrm{Re}(z_1)$
3. $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$
4. $\mathrm{Im}(\lambda z_1) = \lambda\,\mathrm{Im}(z_1)$

Remarque :
Le fait que pour tous réels λ et μ, $\mathrm{Re}(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda \mathrm{Re}(z_1) + \mu \mathrm{Re}(z_2)$ s'appelle la $\mathbb{R}$-linéarité de la partie réelle. Selon vous a-t-on la $\mathbb{C}$-linéarité de la partie réelle ?

Dans toute la suite de ce chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition 3.

On appelle **image** du nombre complexe $z = a + ib$, le point M du plan de coordonnées $(a;b)$. On note $M(z)$ l'image de z.
On appelle **affixe** du point $M(a;b)$ le nombre complexe $z_M = a + ib$.
Il y a donc une correspondance entre l'ensemble des points du plan et l'ensemble des nombres complexes.
On appelle **affixe** du vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(a;b)$ le nombre complexe $z = a + ib$.

Exemple
Soit j le nombre complexe défini par $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Represésenter l'image de j. Calculer j^2, j^3 et $1 + j + j^2$. Interpréter graphiquement les résultats.

I.2 Conjugué d'un nombre complexe

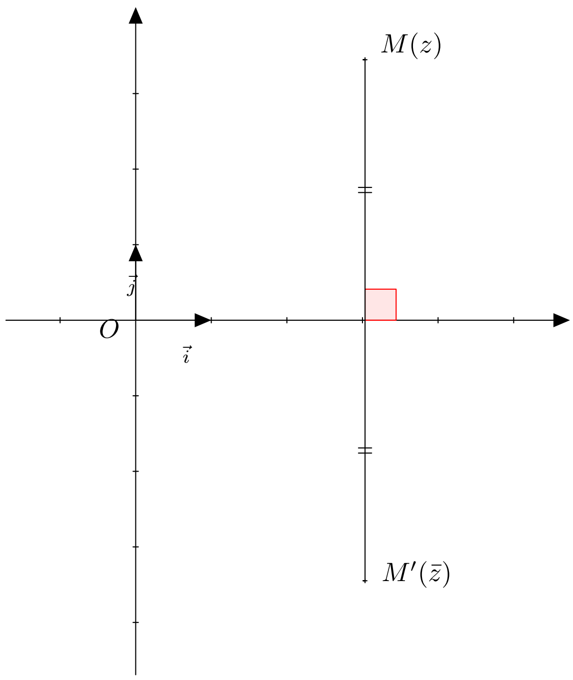
Définition 4.

Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\bar{z} = a - ib$.

Exemple
Le conjugué de $2 + 3i$ est $2 - 3i$, le conjugué de $4i$ est $-4i$, le conjugué de 1 est 1.

Proposition 3.

Si $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ alors M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Proposition 4.

Pour tout nombre complexe z,

1. $\frac{z+\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)$ et $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \mathrm{Im}(z)$
2. $\overline{(\bar{z})} = z$
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
4. $z \in i\mathbb{R}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Démonstration :

Proposition 5 (Opérations et conjuguaison)**.**

Pour tous nombres complexes z, z'

1. $\overline{(z+z')} = \bar{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$
   Si de plus $z' \neq 0$,
3. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$
4. en particulier $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$

Démonstration :

I.3 Module d'un nombre complexe

Proposition 6 (et défintion)**.**

Si z un nombre complexe, alors $z\bar{z}$ est un nombre réel positif. On appelle **module** de z le réel noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Proposition 7.

On a $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

En effet, en notant a la partie réelle de z et b sa partie imaginaire, $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$.

Remarque :
Lorsque z est réel, son module est égal à sa valeur absolue.

Remarque :
Si M est l'image de z alors $|z| = OM$

Proposition 8.

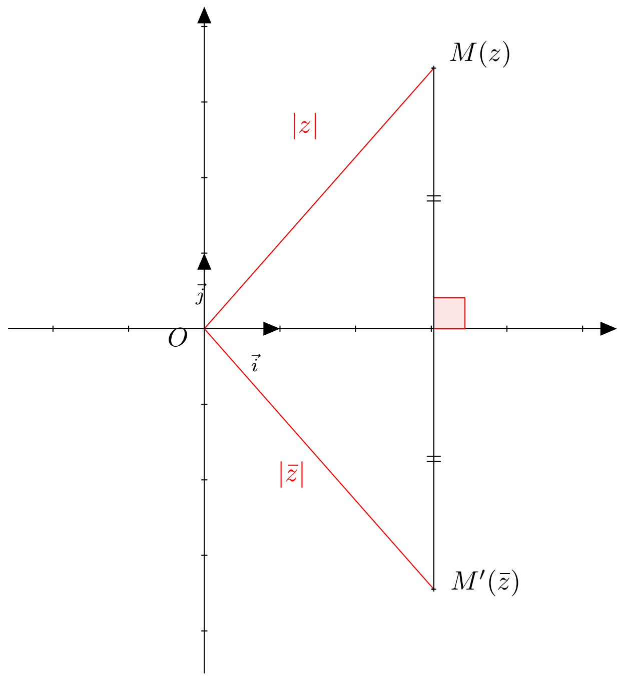
Pour tout nombre complexe z,

1. $|\bar{z}| = |z|$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Remarque :

Si z est l'affixe d'un point M alors $|z| = OM$

Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$ alors $|z| = \|\vec{u}\|$. En particulier si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $|z| = \|\overrightarrow{AB}\|$.



Démonstration :

Exercice 3

Calculer le module des nombres complexes suivants :

3, $3i$, $4+7i$, $3-5i$

Exercice 4

Caractériser géométriquement l'ensemble des nombres complexes vérifiant $|z| = 4$

Proposition 9.

Pour tout nombre complexe z non nul,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Démonstration :

Exercice 5

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes : $\frac{2-5i}{6+i}$; $\frac{4-2i}{(1-i)(6+8i)}$; $\frac{(1-i)(2-2i)}{(2-i)(1+i)}$; $\frac{1}{i-1}$.

Proposition 10.

Pour tous nombres complexes z et z', $|zz'| = |z||z'|$ et, si $z' \neq 0$: $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$

Démonstration :

Exercice 6
Montrer que pour tout nombre complexe z, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Exercice 7
Montrer que $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$ ssi $z \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Re}(z) = |z|$ ssi $z \in \mathbb{R}+$.

Proposition 11 (Inégalité triangulaire)**.**

Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ avec égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$

Démonstration :

Exercice 8
Démontrer que pour tous nombres complexes z et z', $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$

II Forme trigonométrique

II.1 Ensemble des nombres complexes de module 1

Définition 5.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Proposition 12.

Si $z = a + ib \in \mathbb{U}$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Notation.

Si $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, on note $z = e^{i\theta}$

Exemple
$1 = e^{i0}$ $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $-1 = e^{i\pi}$ $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Remarque :
L'image de $e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \theta[2\pi]$

Proposition 13.

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \theta = \varphi[2\pi]$$

Proposition 14.

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$$
$$|e^{i\theta}| = 1$$
$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$
$$\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

Démonstration :

Remarque :
On a en particulier, pour tous réels θ et φ :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)$$

On peut se servir de cette relation pour retrouver les formules de duplications mais il faut se souvenir qu'on a prouvé cette formule grâce aux formules de duplication.

Proposition 15 (Formules d'Euler)**.**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration :

Remarque :
Pour tout entier relatif n,

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Proposition 16 (Formule de Moivre)**.**

Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Exercice 9
Factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$ et en déduire le module et un argument de chacun de ces nombres complexes.

II.2 Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 6.

Soit z un nombre complexe non nul. Le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1 donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$.
On dit que θ est un argument de z et on a $z = |z|e^{i\theta}$.
Cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique** de z.

Exemple
$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i(\frac{\pi}{4})$ donc $\frac{\pi}{4}$ est un argument de $1+i$. La forme trigonométrique de $1+i$ est $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Définition 7 (Proposition)**.**

Soit z un nombre complexe non nul. Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé un **argument** de z. Si θ_0 est un argument de z alors l'ensemble des arguments de z est

$$\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta_0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Remarque :
Si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors on a nécessairement $r = |z|$ et θ est un argument de z.

Exercice 10
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $3 - 3i$, $-2(\sqrt{15} - \sqrt{5}i)$

Exercice 11
A l'aide de la factorisation de $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$ obtenue précédement, donner le module et un argument de chacun de ces nombres complexes.

Méthode 1 (Caractérisation des réels et imaginaires purs à l'aide de l'argument)**.**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0 \quad [\pi]$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

Proposition 17.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') \quad [2\pi]$

Proposition 18.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. On a

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi]$$

et

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\overline{z_1}\right) = -\arg(z_1) \quad [2\pi]$$

$$\arg(-z_1) = \arg(z_1) + \pi[2\pi]$$

Exercice 12
Calculer l'argument de $\frac{2-2i}{\sqrt{3}+i}$

Exercice 13
Reprendre l'exercice sur le nombre complexe j.

Proposition 19 (Interprétation géométrique de l'argument)**.**

Si z est un nombre complexe non nul d'image M, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.
Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul d'affixe z alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$.

III Nombres complexes et géométrie

Proposition 20.

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Démonstration :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}\right)$.

Ce vecteur a donc pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$. Or $x_B - x_A + i(y_B - y_A) = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$

Proposition 21.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\|u\| = |z|$. De même $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

Proposition 22.

Soient $\vec{u}$ est un vecteur non nul alors l'argument de $z_{\vec{u}}$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{u})$

Proposition 23.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls alors $\arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$

Démonstration :

Proposition 24.

Soient A, B, C, D quatre points distincts $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

Application.

Soient $A(1+i)$, $B(3+3i)$ et $C(-1+3i)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

IV Application à la trigonométrie

IV.1 Linéarisation

Proposition 25 (Rappel : formule du binôme de Newton)**.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Méthode 2.

Pour linéariser une expression faisant intervenir des puissances de cosinus et sinus on utilise les formules d'Euler puis on développe grace à la formule du binôme de Newton vue au chapitre 5.

$$(\cos(\theta))^n = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$$

$$(\sin(\theta))^n = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$$

Application.

Linéariser $\sin^3(x)$ et $\cos^4(x)$ puis en déduire $\int_0^{\pi} \sin^3(x)dx$ et $\int_0^{\pi} \cos^4(x)dx$

IV.2 Transformation de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en un polynôme en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

Méthode 3.

Si on note $U = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ alors on a :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(U) \text{ et } \sin(n\theta) = \mathrm{Im}(U)$$

On développe U grâce à la formule du binôme de Newton puis on identifie parties réelles et parties imaginaires.

Application.

Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ et en déduire que $\cos(\frac{\pi}{9})$ est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Exemple
Exprimer $\sin(3x)$ et $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

IV.3 Factorisation de $a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$

Méthode 4.

Posons $z = a + ib$. Puisque $z \neq 0$, il existe φ et $r > 0$ tel que $a + ib = re^{i\varphi}$.
Par identification on trouve $a = r\cos(\varphi)$ et $b = r\sin(\varphi)$.
On a donc :

$$\begin{aligned} a\cos(x) + b\sin(x) &= r(\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)) \\ &= r\cos(x - \varphi) \end{aligned}$$

Exemple
Factoriser $\cos(x) + \sin(x)$.
Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$ et l'équation $\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) = 0$.

V Résolution d'équations algébriques dans $\mathbb{C}$

V.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Méthode 5.

On cherche à résoudre l'équation $z^2 = Z$.
Si z et Z sont écrit sous forme algébrique $z = x + iy$ et $Z = a + ib$, on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{(égalité des modules)} \\ x^2 - y^2 = a & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = b & \text{(égalité des parties imaginaires)} \end{cases}$$

Exemple
Déterminer les racines carrés z_1 et z_2 de $Z = 3 + 4i$ puis placer dans le plan complexes les points $M(z)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$. Que remarquez vous ?

Exercice 14
Trouver les racines carrées des nombres complexes suivants : $Z = 7 + 24i$, $Z = 3 - 4i$, $Z = 15 + 8i$, $Z = -7 + 24i$, $Z = -5 - 12i$

Remarque :
Les deux racines z_1 et z_2 sont opposées.

Méthode 6.

Si Z est non nul et écrit sous forme trigonométrique $Z = Re^{i\varphi}$, on cherche ρ et θ tels que $\rho^2 = R$ et $2\theta = \varphi[2\pi]$. Les solutions sont alors $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{i(\theta+\pi)}$

Exemple
Déterminer les racines carrées de $1 + i$.

V.2 Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Méthode 7.

On souhaite résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation (c'est un nombre complexe !)
Il y a deux cas :

- $\Delta = 0$: l'équation admet une unique solution : $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- $\Delta \neq 0$:
  Soit alors δ une racine carrée complexe de Δ (existe toujours !).
  L'équation admet deux solutions : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$

Exemple
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + 2iz + 1 = 0$

Remarque :
Si les coefficients de l'équations sont réels alors le discriminant est réel. Si $\Delta < 0$, alors une racine carrée complexe de Δ est $\sqrt{|\Delta|} = i\sqrt{-\Delta}$ et les solutions complexes de l'équation sont $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
Ce sont donc deux nombres complexes conjugués.

V.3 Racine et factorisation

VI Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe non nul

VI.1 Racine $n^{ième}$ de l'unité

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Définition 8.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle racines $n^{ième}$ de l'unité les solutions de l'équation $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{ième}$ de l'unité.

Remarque :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

Exemple
$\mathbb{U}_2 = \{1; -1\}$ $\mathbb{U}_4 = \{1; i; -1; -i\}$

Proposition 26.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$U_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}; k \in \{0; \dots; n-1\}\}$$

Si on note $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ alors $\omega_1^2 = e^{4ik\pi}n$, $\omega_1^k = e^{2ik\pi}n$ et on a

$$\mathbb{U}_n = \{\omega_1; \omega_1^2; \dots; \omega_1^{n-1}; \omega_1^n = 1\}$$

Exemple
Pour $n = 6$:

Remarque :
$z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{z_1^n}{z_1} = z_1^{n-1}$, $z_1^- 2 = z_1^{n-1}$, $z_1^{-k} = z_1^{n-k}$.

Exemple

$$\mathbb{U}_3 = \{e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}; 1\}$$

On note souvent $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

VI.2 Cas général

Proposition 27.

Pour tout nombre complexe non nul Z et tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, il existe exactement n solutions à l'équation $z^n = Z$.
Si on note $Z = \rho e^{i\theta}$ avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, il s'agit des nombres complexes z_k définis par :

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$

pour $k \in \{0; \dots n-1\}$

VII Fonction exponentielle complexe

Définition 9.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$). On définit l'exponentielle de z par :

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

$\exp(z)$ est donc un nombre complexe de module e^x et dont un argument est y.

Proposition 28.

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Démonstration :

Proposition 29.

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z = z' + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 15
Résoudre l'équation $e^z = -1$

Démonstration :